Klassische Mechanik

Prof. Dr. J. Wambach

M.Sc. P. Scior
M.Sc. J. Weyrich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2014/15
Übungsblatt 3 — 30. Oktober 2014

Aufgabe P5: Homogene Funktionen

Als *homogen vom Grade n* werden alle Funktionen $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ bezeichnet für die die folgende Bedingung gilt:

$$f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_m) = \alpha^n f(x_1, \dots, x_m) \quad , \forall \alpha \neq 0 \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass für eine differenzierbare Funktion f die zusätzlich *homogen vom Grade n* ist die sogenannte *Eulersche Homogenitätsrelation*

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial f(x_1, \dots, x_m)}{\partial x_i} = n f(x_1, \dots, x_m) \tag{2}$$

gilt.

Aufgabe P6: Runge-Lenz Vektor

Für eine Bewegung in einem Zentralpotential der Form $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$ definiert

$$\vec{B} = \frac{\vec{p} \times \vec{l}}{m\kappa} - \vec{e}_r \tag{3}$$

den sogenannten *Runge-Lenz Vektor*.

a) Zeigen Sie zunächst, dass der Drehimpuls $\vec{l} = \vec{x} \times \vec{p}$ eine Konstante der Bewegung ist.

b) Zeigen Sie nun unter Ausnutzung von a), dass $\vec{B}$ ebenfalls eine Konstante der Bewegung ist.

c) Berechnen Sie $|\vec{B}|$.

Aufgabe P7: Bertrand I

In dieser Aufgabe wollen wir einen Teil des *Theorems von Bertrand* beweisen, welches Aussagen über die Stabilität und Geschlossenheit von Bahnkurven in Zentralkraftproblemen erlaubt. Zunächst wollen wir uns mit der Stabilität möglicher Bahnen beschäftigen.

Wir betrachten hierzu ein allgemeines Zentralkraftfeld der Form

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\frac{g(r)}{r^2} \vec{e}_r, \tag{4}$$

wobei $g(r)$ eine beliebige in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig differenzierbare Funktion ist.

a) Leiten Sie zunächst die radiale Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt der Masse m her (Zylinderkoordinaten).

b) Betrachten Sie nun kleine Abweichungen von einer Kreisbahn mit Radius R

$$r(t) = R + \epsilon(t). \tag{5}$$

Entwickeln Sie die Bewegungsgleichung in linearer Ordnung um $r_0 = R$.

c) Finden Sie nun eine Bedingung für die Stabilität möglicher Bahnen, ($|\epsilon(t)| \ll 1,\ \forall t$). Was ergibt sich für den Fall $g(r) = \frac{\kappa}{r^{n-2}}$ mit $\kappa > 0$?

Aufgabe H3: Bertrand II (1+2+2+3+2 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir Aufgabe P7 weiterführen und vertiefen, indem wir uns der Geschlossenheit möglicher Bahnkurven zuwenden. Hierfür muss den Abweichungen von einer Kreisbahn größere Aufmerksamkeit geschenkt werden, was wir im folgenden Schritt für Schritt tun wollen.

a) Formen Sie zunächst die in P7 a) hergeleitete radiale Bewegungsgleichung unter Ausnutzung der Drehimpulserhaltung in eine zeitunabhängige Form um (Variablenwechsel $t \to \varphi$).

b) Führen Sie desweiteren die Variable $u = \frac{1}{r}$ ein und betrachten Sie kleine Abweichungen von einer Kreisbahn mit $u_0 = \frac{1}{R}$. Entwickeln Sie hierzu die Bewegungsgleichung für die Abweichung $\epsilon(\varphi)$ von der Kreisbahn bis $\mathcal{O}(\epsilon^3)$. *Hinweis: Lassen sie $g(r) = g(\frac{1}{u})$ hier noch allgemein.*

c) Um die Geschlossenheit möglicher Bahnen genauer zu betrachten führen wir eine Fourieranalyse der Lösungen für die Störung $\epsilon(\varphi)$ durch. Entwickeln Sie $\epsilon(\varphi)$ in eine Reihe der Form

$$\epsilon(\varphi) = \sum_{i=0}^{N} \epsilon_i \cos(i\Omega\varphi). \tag{6}$$

Beschränken Sie sich auf $N = 3$. Ω steht hier für die Frequenz des linearisierten Problems, also für den Fall, dass wir die Taylorentwicklung in b) bereits nach linearer Ordnung in $\epsilon(\varphi)$ abbrechen.

Welche Bedingung muss für Ω gelten um geschlossene Bahnkurven zu ermöglichen?

d) Setzen Sie die Entwicklung aus c) in die Bewegungsgleichung ein und bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten.

Hinweis: Vernachlässigen Sie im $\epsilon(\varphi)^2$-Teil alle Terme $\mathcal{O}(\epsilon_{0,2,3}^2)$ bzw. direkt entstehende Terme $\mathcal{O}(\cos(3\Omega\varphi))$. Behalten Sie im $\epsilon(\varphi)^3$-Teil nur den Term proportional ϵ_1^3.

e) Betrachten Sie nun den Fall $g(u) = \kappa u^{1-\Omega^2}$, für welche Kraftfelder sind geschlossene Bahnkurven in diesem Fall möglich?