Klassische Mechanik

Prof. Dr. J. Wambach

M.Sc. P. Scior
M.Sc. J. Weyrich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2014/15
Übungsblatt 1 — 16. Oktober 2014

Aufgabe P1: Parametrisierung nach Bogenlänge

Für eine Bahnkurve $\vec{x}(t)$ ist die Bogenlänge definiert als:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \, |\vec{v}(t')| \, .$$

Für Kurven mit nicht verschwindender Geschwindigkeit $\vec{v}(t) \neq 0$ lassen sich die Bahnkurve bzw. ihre Ableitungen nach Bogenlänge parametrisieren, $\vec{x}(t) = \vec{x}(t(s))$.

a) Drücken Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung einer solchen Bahnkurve als Funktionen von $\dot{s}, \ddot{s}, \vec{e}_t$ und $\dot{\vec{e}}_t$ aus, wobei $\vec{e}_t = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s}$ der Tagentialvektor im Punkt $x(s)$ ist. Berechnen Sie $|\vec{e}_t|$.

b) Weiter führen wir den Normalenvektor $\vec{e}_n = \frac{\dot{\vec{e}}_t}{|\dot{\vec{e}}_t|}$ und den Binormalenvektor $\vec{e}_m = \vec{e}_t \times \vec{e}_n$ ein. Zeigen Sie, dass $\{\vec{e}_t, \vec{e}_n, \vec{e}_m\}$ eine orthonormale Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. Drücken Sie nun die Beschleunigung $\vec{a}$ als Funktion von $\dot{s}, \ddot{s}, \kappa, \vec{e}_t$ und $\vec{e}_n$ aus. Wobei man $\kappa = |\frac{\mathrm{d}\vec{e}_t}{\mathrm{d}s}|$ als Krümmung bezeichnet.

c) Beweisen Sie unter Benutzung der Aufgabenteile a) und b) folgende Identitäten:

$$\frac{|\vec{a} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|^3} = \kappa \, , \qquad \frac{\vec{v} \cdot (\vec{a} \times \dot{\vec{a}})}{(\vec{v} \times \vec{a})^2} = -\vec{e}_n \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{e}_m}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\tau} \, ,$$

wobei man $\frac{1}{\tau}$ Windung der Bahnkurve nennt.

Hinweis zu c): Berechnen Sie Zähler und Nenner getrennt und verwenden Sie die Orthonormalität von $\{\vec{e}_t, \vec{e}_n, \vec{e}_m\}$ *sowie die Zyklizität des Spatprodukts.*

Aufgabe P2: Frenet-Matrix

Die in Aufgabe P1 eingeführte Basis $\{\vec{e}_t, \vec{e}_n, \vec{e}_m\}$ wird auch als begleitendes Dreibein der Bahnkurve bezeichnet. Dessen Änderung entlang der Bahnkurve wird durch folgende Matrixgleichung beschrieben:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \begin{pmatrix} \vec{e}_t \\ \vec{e}_n \\ \vec{e}_m \end{pmatrix} = \mathscr{F} \begin{pmatrix} \vec{e}_t \\ \vec{e}_n \\ \vec{e}_m \end{pmatrix} \, ,$$

mit

$$\mathscr{F}_{ij} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \vec{e}_i \right) \cdot \vec{e}_j \, .$$

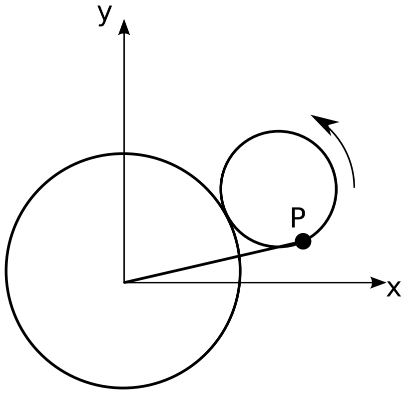
Die Matrix $\mathscr{F}$ heißt Frenet-Matrix. Bei genauer Betrachtung stellt sich heraus, dass die Frenet-Matrix vollständig durch die in Aufgabe P1 eingeführten Größen Krümmung und Windung bestimmt ist

$$\mathscr{F} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \frac{1}{\tau} \\ 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie für eine Helix $\vec{x}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)^{\mathrm{T}}$ die Bogenlänge $s(t)$ und $\mathscr{F}$. Wie verändern sich die Einträge von $\mathscr{F}$ wenn wir als Bahnkurve eine linkshändige Helix betrachten? (ohne Rechnung)

Aufgabe H1: Die Nierenkurve (Nephroide) (4+4+2 Punkte)

Die Bahnkurve die ein Punkt P beschreibt, wenn ein Kreis mit Radius r auf einem weiteren Kreis mit Radius R abrollt (siehe Skizze), nennt man Epizykloide.



a) Finden Sie eine Parametrisierung für die so enstehende Bahnkurve.

b) Betrachten Sie nun den Spezialfall $R = 2r$. Berechnen Sie die Bogenlänge und die Frenet-Matrix $\mathscr{F}$ der nun entstehenden sogenannten Nephroide.

c) Skizzieren Sie die Bahnkurve.

Hinweis: $1 - \sin x \sin 3x - \cos x \cos 3x = 2 \sin^2 x$