Klassische Teilchen und Felder

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. J. Steil

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2018/19
9. Übungsblatt — 12. und 14. Dezember 2018

Aufgabe P17: Dirac'sche Delta-Distribution

Die Dirac'sche Delta-Funktion $\delta(x)$ (eigentlich δ-Distribution) wurde in der Vorlesung folgendermaßen definiert:

$$\int_\alpha^\beta dx f(x)\delta(x-x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{falls } x_0 \in]\alpha,\beta[, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), \quad \text{für} \quad a \neq 0$$

gilt. Hinweis: Verwenden Sie Variablensubstitution.

b) Zeigen Sie, dass

$$\delta(g(x)) = \sum_k \frac{1}{|g'(x_k)|}\delta(x-x_k)$$

gilt, wobei x_k die einfachen Nullstellen von $g(x)$ seien, d. h. $g(x_k) = 0$ und $g'(x_k) \neq 0$ gelte.

c) Berechnen Sie die folgenden Integrale

1. $\int_{-2}^{5} dx\ (x^2+1)\ \delta(2x-1)$
2. $\int_{0}^{2\pi} dx\ f(x)\ \delta(\sin(x))$

Aufgabe P18: Ladungsverteilungen

a) Geben Sie in geeigneten Koordinaten die Ladungsdichte $\rho_S(\vec{r})$ an, wenn die Gesamtladung Q homogen auf einer unendlich dünnen Kugelschale vom Radius R verteilt ist.

b) Gegeben sei die Ladungsdichte in Zylinderkoordinaten

$$\rho_D(\vec{r}) = c\theta(R-\rho)\delta(z) = \begin{cases} c & \text{, für } 0 \leq \rho < R \text{ und } z = 0 \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}.$$

Welches geometrische Objekt wird dadurch beschrieben? Bestimmen Sie dessen Gesamtladung.

Aufgabe H18: Ladungsdichte und Ladung (1+1+1=3 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Delta-Funktion in drei Dimensionen in Zylinder- und Kugelkoordinaten. Nutzen Sie als Ansatz

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = c(\rho,\varphi,z)\,\delta(\rho-\rho_0)\,\delta(\varphi-\varphi_0)\,\delta(z-z_0)$$

bzw.

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \tilde{c}(r,\theta,\varphi)\,\delta(r-r_0)\,\delta(\theta-\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0).$$

Bestimmen Sie die Normierung so, dass

$$\int dV f(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \begin{cases} f(\vec{r}_0) & \text{falls } \vec{r}_0 \in V, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

erfüllt ist.

b) Berechnen Sie die Gesamtladung für eine abgeschirmte Punktladung mit der Ladungsverteilung

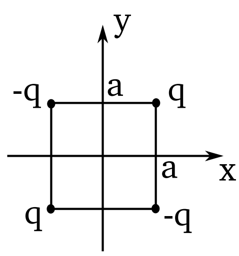
$$\rho_q(\vec{r}) = q\left[\delta(\vec{r}) - \frac{\alpha^2}{4\pi}\frac{e^{-\alpha r}}{r}\right].$$

c) Ein unendlich langer, unendlich dünner, gerader Draht entlang der z-Achse trage die homogene Linienladung λ (Ladung pro Längeneinheit). Wie lautet die Raumladungsdichte $\rho_\lambda(\vec{r})$ in Zylinderkoordinaten? Machen Sie dazu einen geeigneten Ansatz für die Ladungsdichte (siehe Teilaufgabe a)) und bestimmen Sie unbekannte Größen durch Integration über ein geeignetes Volumen.

Aufgabe H19: Elektrostatisches Potenzial und Feldstärke (1+1+1=3 Punkte)

a) Berechnen Sie das elektrostatische Potenzial zweier Punktladungen der Stärke q_1 und $-q_2$ ($q_2 > q_1 > 0$), die den Abstand d voneinander haben. Das elektrostatische Potenzial soll dabei im Unendlichen verschwinden ($\lim_{\vec{r}\to\infty}\phi(\vec{r}) = 0$). Wie muss das Verhältnis der beiden Ladungen q_1/q_2 gewählt werden, dass bei einem Abstand von $d/3$ von der ersten Punktladung in Richtung der zweiten Punktladung für das Potenzial $\phi = 0$ gilt?

Gegeben sei eine quadratische Anordnung von Punktladungen wie in der Abbildung dargestellt.



b) Bestimmen Sie das elektrostatische Potenzial.

c) Bestimmen Sie das elektrische Feld. Wie lautet das Feld am Ursprung?