Klassische Teilchen und Felder

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. J. Steil

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2018/19

8. Übungsblatt — 5. und 7. Dezember 2018

Aufgabe P16: Erzwungene Schwingung

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich an einer Feder. Dabei wirkt die äußere Kraft $F(t) = f\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}$ sowie die Reibungskraft $-2\gamma\dot{x}$, so dass die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} = \frac{f}{m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}, \quad \text{mit } \omega_0, \gamma, \Omega > 0 \text{ und } f \geq 0, \tag{P16.1}$$

lautet.

a) Lösen Sie die homogene Gleichung ($f = 0$) mit einem Exponentialansatz $x(t) = c\mathrm{e}^{\lambda t}$ und geben Sie die Lösung $x_h(t)$ in der Form $x_h(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ an. Diskutieren Sie die möglichen Schwingungsformen.

b) Die allgemeine Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung (DGL) besteht aus einer speziellen Lösung $x_s(t)$ sowie der allgemeinen Lösung der homogenen DGL. Die Lösung der homogenen Gleichung wurde in Teilaufgabe a) bestimmt und nun gilt es eine spezielle Lösung zu finden. Eine Möglichkeit eine solche Lösung zu finden wäre, eine zu raten bzw. einen geeigneten Ansatz zu wählen. Ein geeigneter Ansatz hier ist $x_s(t) = B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}$ mit der komplexen Amplitude B. Eine Konstruktion der speziellen Lösung über *Variation der Konstanten* ist mit Hilfe der homogenen Lösung ebenfalls möglich. Geben Sie die allgemeine Lösung in folgender Form an

$$x(t) = x_h(t) + x_s(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + x_s(t)$$

und bestimmen Sie den Realteil dieser allgemeinen Lösung für den Schwingfall ($\omega_0^2 > \gamma^2$). Wie Sie $x_s(t)$ konstruieren, ist Ihnen überlassen.

Die Lösung der homogenen Gleichung klingt exponentiell ab. Nach dem Einschwingvorgang wird die Schwingung daher von der speziellen Lösung dominiert, welche wir im Folgenden genauer untersuchen wollen.

c) Für welche Anregungsfrequenz Ω wird die Amplitude maximal? Was passiert hier mit der Amplitude für $\gamma = 0$? Wann ist das Amplitudenmaximum bei $\Omega = 0$? Wie lautet die Amplitude für $\Omega = 0$ und $\Omega \to \infty$? Skizzieren Sie qualitativ die Amplitude in Abhängigkeit von Ω für $\gamma = 0$, γ klein und γ groß in Bezug auf ω_0.

d) Wie lautet die Phasendifferenz zwischen Schwingung der Masse und Anregung? Welchen Wert nimmt diese für $\Omega = \omega_0$ an? Skizzieren Sie qualitativ die Phasenverschiebung in Abhängigkeit von Ω für $\gamma = 0$, γ klein und γ groß in Bezug auf ω_0.

Aufgabe H16: Durch Kraftstoßgetriebener Oszillator (1+1+1=3 Punkte)

Wir betrachen den gedämpften Oszillator aus der Präsenzübung P16 mit einer neuen externen Kraft

$$f(t) = \begin{cases} v_0/T & \text{für } t < T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{H16.1}$$

welche einen Kraftstoß der Dauer T beschreibt. Der Oszillator sei zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe ($x(t = 0) = 0$ und $\dot{x}(t = 0) = 0$) und es gelte $\gamma < \omega_0$.

a) Bestimmen Sie die Auslenkung $x_<(t)$ während des Kraftstoßes für $t \in [0, T]$.

b) Bestimmen Sie die Auslenkung $x_>(t)$ nach dem Kraftstoßfür $t > T$. Zum Zeitpunkt $t = T$ gelten die Stetigkeitsbedinungen

$$x_<(t = T) = x_>(t = T) \tag{H16.2a}$$

$$\dot{x}_<(t = T) = \dot{x}_>(t = T) \tag{H16.2b}$$

welche Sie nutzen können, um etwaige Integrationskonstanten der Lösung $x_>(t)$ zu bestimmen.

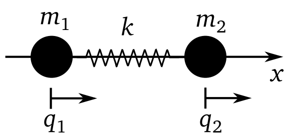
c) Zeigen Sie, dass die Lösung $x_>(t)$ für den Spezialfäll $\gamma T \gg 1$ durch

$$x_>(t) = \frac{v_0}{T\omega_0^2}\left(\cos(\omega_0(t-T)) + \frac{\gamma}{\omega_0}\sin(\omega_0(t-T))\right)\mathrm{e}^{-\gamma(t-T)} \tag{H16.3}$$

gegeben ist und skizzieren Sie in diesem Spezialfall die Lösung des Problems für $t \in [0, 2T]$.

Aufgabe H17: Federschwinger (0.5+1+1.5=3 Punkte)

Betrachten Sie zwei Teilchen der Massen m_1 und m_2, welche durch eine Feder mit Federkonstante k verbunden sind. Die Bewegung beider Teilchen sei auf die x-Achse beschränkt.



a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion L des Systems in den generalisierten Koordinaten q_1 und q_2 mit $q_1 = q_2 = 0$ in der Gleichgewichtslage (siehe nebenstehende Abbildung).

b) Berechnen Sie die Eigenfrequenzen ω^2 des Systems.

c) Bestimmen Sie die beiden Normalmoden $\tilde{\eta}^{(0)}$ und $\tilde{\eta}^{(1)}$ des Systems und diskutieren Sie die entsprechenden Schwingungsformen.