Klassische Teilchen und Felder

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. J. Steil

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2018/19
7. Übungsblatt — 28. und 30. November 2018

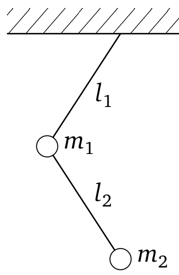
Aufgabe P14: Zwangsbedingungen

Bestimmen Sie für die folgenden Systeme die Zwangsbedingungen. Sind die Zwangsbedingungen skleronom oder rheonom bzw. holonom oder nicht-holonom?

a) Zwei Massenpunkte m_1 und m_2 bewegen sich reibungsfrei auf einem Kreis mit Radius R. Sie sind mit einer festen, masselosen Stange der Länge L (mit $L < 2R$) miteinander verbunden.

b) Eine Masse m ist an einer masselosen Stange der Länge L befestigt und schwingt in der xz-Ebene. Der Aufhängepunkt des ebenen Pendels bewege sich mit der Funktion $x(t) = A\cos(\omega t)$ entlang $z = 0$.

c) Zwei Massen m_1 und m_2 bilden ein Doppelpendel mit den Längen l_1 und l_2 mit festem Aufhängepunkt im Ursprung.



Aufgabe P15: Lagrange-Formalismus erster und zweiter Art

Ein Teilchen der Masse m gleite reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft auf der Innenseite eines Rotationsparaboloids $az = x^2 + y^2$, mit $a > 0$ und $a = \text{const.}$.

a) Verwenden Sie zunächst den Lagrange-Formalismus erster Art, um das System zu behandeln. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen in Zylinderkoordinaten $\{\rho, \varphi, z\}$ auf. Bestimmen Sie aus der Bewegungsgleichung für φ den erhaltenen Drehimpuls. Bestimmen Sie anschließend den Lagrange-Multiplikator λ der Zwangsbedingung und entkoppeln Sie damit die Bewegungsgleichung für die radiale Komponente ρ.

b) Bearbeiten Sie nun das Problem mit Hilfe des Lagrange-Formalismus zweiter Art. Berücksichtigen Sie die Zwangsbedingung nun direkt durch die Wahl geeigneter generalisierter Koordinaten in der Lagrange-Funktion L. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe a).

c) Zeigen Sie, dass der Massenpunkt die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \sqrt{2g/a}$ besitzt, wenn er sich auf einer Kreisbahn in der konstanten Höhe h bewegt.

d) Betrachten Sie kleine Auslenkungen $\epsilon(t) \ll R$ der Punktmasse um die Kreisbahn aus Teilaufgabe c):

$$\rho(t) = R + \epsilon(t) \tag{P15.1}$$

und bestimmen Sie die Kreisfrequenz der Oszillation $\epsilon(t)$ um die stabile Kreisbahn.

Aufgabe H14: Bewegung in kugelsymmetrischem Potenzial (1+1=2 Punkte)

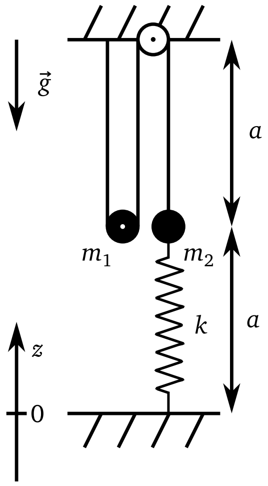
Ein Teilchen bewegt sich im kugelsymmetrischen Potenzial $U(|\vec{r}|, t)$.

a) Bestimmen Sie die die Lagrange-Funktion $L(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, r, \theta, \varphi)$.

b) Geben Sie eventuell vorhandene zyklische Koordinaten und die zugehörigen Erhaltungsgrößen an.

Aufgabe H15: Flaschenzug (1+2+1=4 Punkte)

Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Raum der Höhe $2a$, in dem ein einfaches Flaschenzugsystem mit einer Feder verbunden ist. Die Feder hat die Federkonstante k und in ihrer Gleichgewichtslage die Länge a. Über eine bewegliche Rolle mit Masse m_1 ist ein Seil geführt, welches sie mit der Masse m_2 über eine feste Rolle verbindet. Wir bezeichnen im Folgenden die Position der beweglichen Rolle mit $z_1(t)$ und die Position der Masse m_2 mit $z_2(t)$. Das Seil hat die Länge $L = 3a$. Reibung, die Ausdehnung der Masse und der Rollen sowie die Möglichkeit von Überschlägen können außer Acht gelassen werden. Das gesamte System befindet sich im Schwerefeld der Erde ($\vec{g} = -g\vec{e}_z$) und die Bewegung findet ausschließlich in z-Richtung statt.



a) Formulieren Sie die Zwangsbedingung.

b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Lagrange-Formalismus 1. Art auf und zeigen Sie, dass die Position $z_2(t)$ der Masse m_2 der Bewegungsgleichung

$$0 = \ddot{z}_2(t) + 4k\frac{z_2(t) - a}{m_1 + 4m_2} + 2g\frac{2m_2 - m_1}{m_1 + 4m_2}$$

genügt.

c) Wie groß muss die Masse m_2 sein, damit sich das System bei $z_2 = b$ im Gleichgewicht befindet.