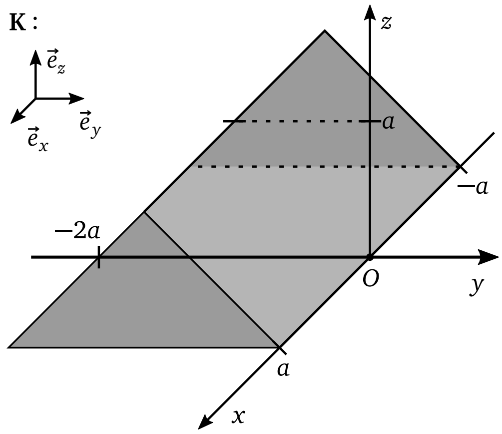
Klassische Teilchen und Felder

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. J. Steil

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2018/19
6. Übungsblatt — 21. und 23. November 2018

Aufgabe P12: Trägheitstensor und Hauptträgheitsachsen eines Dreiecksprismas



Das nebenstehende Dreiecksprisma hat das Volumen $V = 2a^3$ und eine konstante Dichte ρ. Im abgebildeten kartesischen Koordinatensystem **K** mit dem Ursprung O ist der Trägheitstensor gegeben durch

$$\underline{\underline{J}}_{\mathbf{K}} = Ma^2 \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}. \qquad \text{(P12.1)}$$

a) Aus der Vorlesung ist für Drehimpuls $\vec{L}$ folgende Relation bekannt:

$$\vec{L} = \underline{\underline{J}}\vec{\omega}, \qquad \text{(P11.2)}$$

welche $\vec{L}$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und dem Trägheitstensor $\underline{\underline{J}}$ verknüpft. Der Trägheitstensor in **K** ist nicht diagonal. Im Hauptträgheitsachsen-System **H**, welches die Basisvektoren $\{\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta\}$ habe, ist der Trägheitstensor diagonal:

$$\begin{pmatrix} L_\xi \\ L_\eta \\ L_\zeta \end{pmatrix}_{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix}_{\mathbf{H}} \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix}_{\mathbf{H}}. \qquad \text{(P11.3)}$$

Die Diagonalelemente sind die Hauptträgheitsmomente J_ξ, J_η und J_ζ.

Um den Zusammenhang zwischen den Hauptträgheitsmomenten und -achsen und dem Trägheitstensor in **K** herzustellen, gilt es den Zusammenhang zwischen den Koordinatensystemen **K** und **H** zu finden. Die Eigenwerte von $\underline{\underline{J}}$ sind die Hauptträgheitsmomente und die Eigenvektoren die Hauptträgheitsachsen. Das Eigenwertproblem in **K** lautet

$$\underline{\underline{J}}_{\mathbf{K}}\vec{\omega}_i^{\mathbf{K}} = J_i\vec{\omega}_i^{\mathbf{K}}$$

$$\left(\underline{\underline{J}}_{\mathbf{K}} - J_i\mathbb{1}\right)\vec{\omega}_i^{\mathbf{K}} = 0. \qquad \text{(P11.4)}$$

Dieses homogene Gleichungssystem hat nur dann eine nicht-triviale Lösung ($\vec{\omega}_i^{\mathbf{K}} \neq \vec{0}$), wenn das charakteristische Polynom verschwindet, d.h.

$$\det\left(\underline{\underline{J}}_{\mathbf{K}} - J_i\mathbb{1}\right) = 0. \qquad \text{(P11.5)}$$

Berechnen Sie aus dieser Bedingung die drei Hauptträgheitsmomente J_i. Bestimmen Sie anschließend, mit Hilfe von Gl. (P11.4), die Hauptträgheitsachsen und normieren Sie diese.

b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix für einen Basiswechsel von **K** nach **H** und transformieren Sie mit ihr $\underline{\underline{J}}_{\mathbf{K}}$ nach **H**.

Aufgabe P13: Drehimpuls für zylindersymmetrische Körper

Ein starrer Körper mit zylindersymmetrischer Massenverteilung rotiere um seine Symmetrieachse ($\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$). Zeigen Sie ausgehend von der Definition des Drehimpulses,

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}^{(i)} \times \vec{p}^{(i)},$$

dass der Drehimpuls in die Richtung der Drehachse zeigt. Hinweis: Benutzen Sie Symmetrieargumente um das Verschwinden etwaiger Restterme zu zeigen.

Aufgabe H12: Steiner'scher Satz (1.5+1.0+0.5= 3 Punkte)

Betrachten Sie das Dreiecksprisma aus Aufgabe P12.

a) Zeigen Sie, dass Schwerpunkt des Prismas im Koordinatensystem **K** bei $\vec{R}_S = (0, -a, a/3)^{\mathrm{T}}$ liegt.

b) Berechnen Sie den Trägheitstensor (J^S_{ij}) bezüglich des Schwerpunkts S.

c) Das Prisma rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega(1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ um den Schwerpunkt. Berechnen Sie die entsprechende Rotationsenergie.

Aufgabe H13: Massenpunkt auf einem Kreis (1+2=3 Punkte)

Wir betrachten, in drei Dimensionen, einen Massenpunkt der Masse m auf einem Kreis mit konstantem Radius R. Der Massenpunkt befindet sich im Zentralpotenzial $V(\vec{r}) = -\kappa/|\vec{r}|$, wobei $\vec{r} = \vec{0}$ dem Mittelpunkt des Kreises entspricht.

a) Bestimmen Sie die beiden Zwangsbedingungen dieses Problems.

b) Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art in Zylinderkoordinaten auf und geben Sie Bestimmungsgleichungen für $\ddot{\rho}$, $\ddot{\varphi}$ und $\ddot{z}$ an. Hinweis: Der Gradient in Zylinderkoordinaten ist

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z.$$