Klassische Teilchen und Felder

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. J. Steil

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2018/19
15. Übungsblatt 13. und 15. Februar 2019

Hinweis zur Klausur

Die Klausur findet am Freitag, dem 22.03.2019 von 10:00-12:00 Uhr in S1|01 A03 statt. Bitte bringen Sie einen Lichtbildausweis und Ihren Studienausweis mit und seien Sie pünktlich. Als Hilfsmittel ist ein beidseitig eigenhandschriftlich beschriebenes DIN A4-Blatt zugelassen. Ein mathematisches Formelblatt, das wir einige Tage vor der Klausur zur Ansicht ins Netz stellen, liegt der Klausur bei.

Aufgabe P30: Der durchgeflossene Draht im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie

Betrachten Sie im Folgenden einen unendlich langen geraden Draht bestehend aus einem unbeweglichen Ionen-Gitter und einem beweglichen Elektrongas. Im Laborsystem, dem Ruhesystem des Ionengitters, **K** haben die Ionen eine konstante Linienladungsträgerdichten von $\lambda_i^{\mathbf{K}} \equiv \lambda_0$. Die Elektronen bewegen sich im Draht mit der konstanten Driftgeschwindigkeit $\vec{v}_{\mathrm{D}}^{\mathbf{K}} \equiv v_{\mathrm{D}}\vec{e}_z$ und wir bezeichnen das Ruhesystem der Elektronen als $\mathbf{K}'$.

a) Geben Sie die Linienladungsträgerdichte der Elektronen λ_e in **K** und $\mathbf{K}'$ für den Fall eines im Laborsystem **K** total ungeladenen Drahtes an. Der von der Elektronen mit ihrer konstanten Driftgeschwindigkeit $\vec{v}_{\mathrm{D}}^{\mathbf{K}}$ erzeugte Strom $I^{\mathbf{K}} = \lambda_e^{\mathbf{K}} v_{\mathrm{D}}$ sei zeitlich und räumlich konstant in **K**.

b) Eine Ladung q bewege sich parallel zum Draht mit einer Geschwindigkeit von $\vec{v}_q^{\mathbf{K}} = \vec{v}_{\mathrm{D}}^{\mathbf{K}}$ und einem konstanten Abstand zum Draht von ρ. Berechnen Sie die auf q wirkende Kraft in **K** und $\mathbf{K}'$. Ist die in **K** wirkende Kraft gleich der in $\mathbf{K}'$ wirkenden Kraft?

Hinweis: In beiden Koordinatensystemen gelten die Gesetze der Elektro- und Magnetostatik auf Grund der in der Aufgabenstellung gemachten Idealisierungen. Die für die Rechnung in dieser Teilaufgabe benötigten $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder haben wir im Verlauf des Semesters bereits kennen gelernt. Das elektrische Feld außerhalb eines homogen mit der Linienladungsdichte λ geladenen Zylinders wurde in Aufgabe H20 berechnet:

$$\vec{E}(\rho) = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0 \rho}\vec{e}_\rho. \tag{P30.1}$$

Das von einem unendlich langen stromdurchflossenen Leiter erzeugte Magnetfeld wurde in der Vorlesung berechnet:

$$\vec{B}(\rho) = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{1}{\rho}\vec{e}_\varphi. \tag{P30.2}$$

Aufgabe P31: Kovariante Formulierung des Elektromagnetismus

Eine Erweiterung auf Felder und eine kovariante Formulierung des Lagrange-Formalismus ist möglich. Ohne weiter auf die Details dieser Verallgemeinerung einzugehen, wollen wir im Folgenden ausgehend von der Lagrange-Funktion (eigentlich Lagrange-Dichte) des elektromagnetischen Feldes

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(A_\alpha, \partial_\beta A_\alpha) \equiv -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu \tag{P31.1}$$

die Maxwellgleichungen und die Kontinuitätsgleichung im Vakuum herleiten. Dabei sei $(A^\mu) = (\phi/c, \vec{A})$ das Vierer-Potenzial, $(J^\mu) = (c\rho, \vec{j})$ der Vierer-Strom und $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ ist der antisymmetrische, elektromagnetische Feldstärketensor.

a) Verwenden Sie die Euler–Lagrange Gleichungen

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = 0 \tag{P31.2}$$

mit der Lagrange-Funktion aus Gleichung (P31.1) um die inhomogenen Maxwellgleichungen (das Gauß–Ampère Gesetz) im Vakuum

$$\partial_\mu F^{\mu\alpha} = \mu_0 J^\alpha \tag{P31.3}$$

herzuleiten.

Hinweis: Für die partiellen Ableitungen nach dem Vierer-Potenzial gilt $\partial(\partial_\mu A_\nu)/\partial(\partial_\alpha A_\beta) = \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu$ sowie $\partial(A_\mu)/\partial(A_\alpha) = \delta^\alpha_\mu$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Gleichung (P31.3) und den bekannten Maxwellgleichungen aus der Vorlesung die Komponenten von $F^{\mu\nu}$ als Funktionen der Komponenten von $\vec{E}$ und $\vec{B}$.

c) Zeigen Sie über Gleichung (P31.3) und Eigenschaften des Feldstärketensors, dass der Vierer-Strom erhalten und damit die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist:

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \tag{P31.4}$$

d) Zeigen Sie, dass der elektromagnetische Feldstärketensor die homogenen Maxwellgleichungen (das Gauß–Faraday Gesetz)

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \partial_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 0 \tag{P31.5}$$

erfüllt. $\tilde{F}^{\mu\nu}$ ist der sogenannte duale elektromagnetische Feldstärketensor, welcher mit Hilfe des total antisymmetrischen ($\epsilon^{\dots\alpha\dots\beta\dots} = -\epsilon^{\dots\beta\dots\alpha\dots}$) Levi-Civita Symbols in vier Dimensionen

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & \text{wenn } (\alpha\beta\gamma\delta) \text{ eine gerade Permutation von } (0,1,2,3) \\ -1 & \text{wenn } (\alpha\beta\gamma\delta) \text{ eine ungerade Permutation von } (0,1,2,3) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{P31.6}$$

aus dem elektromagnetischen Feldstärketensor $F_{\rho\sigma}$ gewonnen werden kann.

Hinweis: Um Gleichung (P31.5) zu beweisen ist nur die totale Antisymmetrie des Levi-Civita Symbols und die Definition des Feldstärketensor von Relevanz. Der Faktor 1/2 in Gleichung (P31.5) ist Konvention und hat auf den Beweis der verschwindenden Vierer-Divergenz keinen Einfluss.

e) Zeigen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus den vorherigen Teilaufgaben, dass Gleichung (P31.5) den Ihnen aus der Vorlesung bekannten homogenen Maxwellgleichungen entspricht.