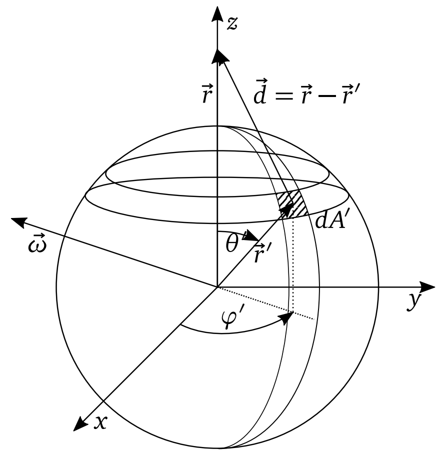
Klassische Teilchen und Felder

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. J. Steil

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2018/19
12. Übungsblatt 23. und 25. Januar 2019

Aufgabe P24: Rotierende Hohlkugel



Auf der Oberfläche einer Hohlkugel mit Radius R sei eine Ladung Q homogen verteilt. Die Kugel rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um eine ihrer Symmetrieachsen. Für die Rechnungen in dieser Aufgabe bietet sich das nebenstehende Koordinatensystem an: o.B.d.A. wählen wir $\vec{r} \parallel \vec{e}_z$. Die durch die Rotation erzeugte Stromdichte ist gegeben durch

$$\vec{j}(\vec{r}\,') = \rho(\vec{r}\,')\vec{v}(\vec{r}\,') = \frac{Q}{4\pi R^2}\vec{\omega} \times \vec{r}\,'\delta\left(r' - R\right). \tag{P24.1}$$

a) Bestimmen Sie das Vektorpotenzial

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{\mu_0 Q}{(4\pi R)^2}\vec{\omega} \times \int d^3r' \frac{\vec{r}\,'\delta\left(r' - R\right)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{P24.2}$$

und zeigen Sie, dass $\vec{A}(\vec{r})||(\vec{\omega} \times \vec{r})$.

Hinweis: Verwenden Sie die Kugelkoordinaten $\left\{r', \theta', \varphi'\right\}$ aber betrachten sie die kartesischen Komponenten von $\vec{r}\,'$. Das verbleibende Integral kann mit Hilfe von

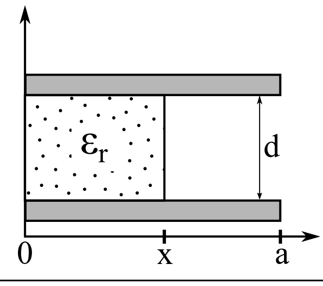
$$\int dx \frac{x}{\sqrt{a + 2bx}} = \frac{(a - bx)\sqrt{a + 2bx}}{3b^2}$$

ausgeführt werden.

b) Berechnen Sie die magnetischen Induktion $\vec{B}(\vec{r})$ innerhalb und außerhalb der Hohlkugel.
Hinweis:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

Aufgabe P25: Plattenkondensator



Ein Plattenkondensator mit zwei Platten (Fläche $a \cdot b$) im Abstand d und den Ladungen $+Q$ und $-Q$ sei zu einem Teil mit einem Dielektrikum ϵ_r gefüllt (siehe Skizze). Die Platten seien so groß, dass Randeffekte vernachlässigt werden können und das $\vec{E}$- und $\vec{D}$-Feld homogen sind.

a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ und die dielektrische Verschiebung $\vec{D}$ zwischen den Platten. Beachten Sie hierbei das Verhalten der Felder an der Grenzschicht!

b) Im linearen isotropen Medium ist die elektrostatische Energie gegeben durch

$$W = \frac{1}{2}\int d^3r\vec{E}\cdot\vec{D}. \tag{P24.1}$$

Berechnen Sie die elektrostatische Energie dieser Anordnung.

c) Welche Kraft $F = -\frac{dW}{dx}$ wirkt bei einer infinitesimalen Ausdehnung des Dielektrikums?

d) Welche Energie muss insgesamt aufgewendet werden, um den Plattenkondensator vollständig mit dem Dielektrikum zu füllen?

e) Berechnen Sie die Kapazität $C = Q/U$ des Kondensators. U ist dabei die Potenzialdifferenz zwischen den Kondensatorplatten.

Aufgabe H25: Vektorpotenzial (1+1=2 Punkte)

Gegeben sei das Vektorpotenzial

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu\left(\frac{\cos\theta}{r}\vec{e}_\theta + \frac{\sin\theta}{r^2}\vec{e}_\varphi\right)$$

in kanonischen Kugelkoordinaten.

a) Berechnen Sie die zu $\vec{A}(\vec{r})$ gehörende magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r})$.

b) Bestimmen Sie die Eichfunktion $\psi(\vec{r})$ einer Eichtransformation, welche $\vec{A}(\vec{r})$ mit

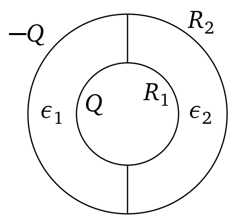
$$\vec{A}_\mathrm{D}(\vec{r}) = \mu\frac{\sin\theta}{r^2}\vec{e}_\varphi$$

verknüpft. Hinweis:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} &= \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}A_\varphi. \\
\vec{\nabla}\times\vec{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$

Aufgabe H26: Gefüllter Kugelkondenstator (0.5+1.0+1.0=2.5 Punkte)

Wir betrachten eine Anordnung aus zwei konzentrischen, unendlich dünnen Kugelschalen welche die Ladungen Q und $-Q$ tragen und die Radien $R_1 < R_2$ haben. Der Raum zwischen den Kugelschalen sei zur Hälfte gefüllt mit einem Material mit Dielektrizitätskonstante ϵ_1 und die andere Hälfte ist gefüllt mit einem Material mit Dielektrizitätskonstante ϵ_2.



a) Die elektrischen Felder $\vec{E}_i(\vec{r})$ in den beiden Dielektrika zwischen den Kugelschalen können als radialsymmetrisch angenommen werden:

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = E_i(r)\vec{e}_r.$$

Zeigen Sie, dass weiterhin $E_1(r) = E_2(r) \equiv E(r)$ gilt.

b) Berechnen Sie $E(r)$ und die $\vec{D}_i(\vec{r})$-Felder in den beiden Dielektrika.

c) Berechnen Sie die Gesamtkapazität C des Kondensators.

Aufgabe H27: Zerlegungssatz für Vektorfelder (1.5 Punkte)

Ein beliebiges Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ kann restlos in einen rotationsfreien *longitudinalen* $\vec{A}_\mathrm{L}$- und einen divergenzfreien *transfersalen* $\vec{A}_\mathrm{T}$-Anteil zerlegt werden, wenn $\vec{A}(\vec{r})$ und seine Ableitungen im Unendlichen hinreichend stark abfallen:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_\mathrm{L}(\vec{r}) + \vec{A}_\mathrm{T}(\vec{r}), \quad \text{mit } \vec{\nabla} \times \vec{A}_\mathrm{L}(\vec{r}) = 0 \text{ und } \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_\mathrm{T}(\vec{r}) = 0 \text{ für } \lim_{\vec{r}\to\infty} \vec{A}(\vec{r}) = 0. \tag{H27.1}$$

Beweisen Sie Gl. (H27.1) und zeigen Sie, dass

$$\vec{A}_\mathrm{L}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \int d^3r' \, \frac{\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{A}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \tag{H27.2a}$$

$$\vec{A}_\mathrm{T}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \int d^3r' \, \frac{\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \times \vec{A}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \tag{H27.2b}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \Delta_{\vec{r}} \int d^3r' \, \frac{\vec{A}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{H27.3}$$

gilt und verwenden sie anschließend

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \left(\vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \vec{A}(\vec{r})\right) = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \left(\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r})\right) - \Delta_{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}) \tag{H27.4}$$

um die Identität (H27.1) mit (H27.2a) und (H27.2b) zu beweisen.