- Ort des Ursprungs von $K'$ in $K$: $x^1 = vt = \frac{v}{c} x^0$
  " " " " " " $K'$: $x'^1 = 0$

$\Rightarrow \quad 0 = \Lambda^1{}_0 x^0 + \Lambda^1{}_1 x^1 = (\Lambda^1{}_0 + \frac{v}{c}\Lambda^1{}_1) x^0 = -(\sinh\chi - \frac{v}{c}\cosh\chi)\, x^0$

$\Rightarrow \quad \tanh\chi = \frac{v}{c} =: \beta \quad \Leftrightarrow \quad \chi = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$ „Rapidität"

$\Rightarrow \quad \cosh\chi = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\chi}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} =: \gamma$

$\Rightarrow \quad \sinh\chi = \tanh\chi\cosh\chi = \beta\gamma$

$$\Rightarrow \quad \boxed{(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} t' &= \tfrac{1}{c} x^{0\prime} = \tfrac{1}{c}(\gamma x^0 - \beta\gamma x^1) = \gamma\left(t - \tfrac{v}{c^2}x\right) \\ x' &= x^{1\prime} = (-\beta\gamma x^0 + \gamma x^1) = \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}\right\} \text{ für } \vec{v} = v\vec{e}_x$$

Bemerkungen

- Transformationen zwischen geradlinig gleichförmig gegeneinander bewegten Koordinatensystemen mit parallelen Achsen = „spezielle Lorentz-Transformationen" = „Lorentz-Boosts"

- Lorentz-Boosts + räumliche Drehungen = eigentliche orthochrone Lorentz-Transformationen (= Gruppe)

- eigentl. orthochrone L.T. + Raumspiegelungen + Zeitspiegelungen = Lorentz-Transformationen

- $v \to c \Leftrightarrow \beta \to 1 \Rightarrow \gamma \to \infty \Rightarrow$ nur Relativgeschw. $v < c$ möglich.

- $v \ll c \Rightarrow \beta \approx 0 \Rightarrow \gamma \approx 1 \Rightarrow t' \approx t \,,\quad x' \approx x - vt$
  $\hat{=}$ nichtrelativist. Vorschrift („Galilei-Transformationen")

- inverse Transformationsmatrix:

$$(\Lambda^\mu{}_\nu)^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^\mu{}_\nu(\vec{v}))^{-1} = (\Lambda^\mu{}_\nu(-\vec{v}))$$

✓

## 10.4 Relativität von Zeit- und Längenskalen

Wir nehmen wieder an: $\vec{v} = v\,\vec{e}_x$

Zwei Ereignisse in K: $(t_a, x_a, y_a, z_a)$, $(t_b, x_b, y_b, z_b)$

Zeitdifferenz in K': $t_b' - t_a' = \gamma\left(t_b - t_a - \frac{v}{c^2}(x_b - x_a)\right)$

i) $t_b - t_a = 0$ (Ereignisse in K gleichzeitig)

$\Rightarrow t_b' - t_a' = -\gamma \frac{v}{c^2}(x_b - x_a) \overset{\text{i.A.}}{\neq} 0 \rightarrow$ nicht gleichzeitig!

(„Relativität der Gleichzeitigkeit")

ii) Sei $t_b > t_a$, d.h. das Ereignis a findet in K vor dem Ereignis b statt.
Ist es möglich, dass in K' das Ereignis a erst nach dem Ereignis b stattfindet?
Dann müsste gelten

$$t_b' - t_a' < 0 \iff t_b - t_a < \frac{v}{c^2}(x_b - x_a)$$

$$\iff x_b - x_a > \frac{c}{v}\, c(t_b - t_a) > c(t_b - t_a),$$

d.h. $x_a$ und $x_b$ müssen weiter voneinander entfernt sein als die Strecke $c(t_b - t_a)$, die das Licht in der Zeit $t_b - t_a$ zurücklegen kann. Damit ist in dieser Zeit keinerlei Informationsaustausch zwischen a und b möglich: Die Ereignisse sind nicht „kausal verbunden" – Ursache und Wirkung können nicht durch eine Lorentz-Transformation vertauscht werden.

## Zeitdilatation

Betrachten wir nun zwei Ereignisse, die in K im zeitlichen Abstand $\Delta t$ am gleichen Ort stattfinden:

$$t_b - t_a = \Delta t, \quad x_a - x_b = 0$$

$$\Rightarrow \Delta t' = t_b' - t_a' = \gamma \Delta t > \Delta t$$

Für einen Beobachter in $K'$ gehen also die Uhren in $K$ langsamer als seine eigene. Allerdings würde auch für einen Beobachter in $K$ eine in $K'$ stationäre Uhr langsamer gehen als seine eigene.

Unterschied im Messprozess:

Im ursprünglichen Beispiel (in $K$ ruhendes Ereignis) benötigt

$K$ eine einzige Uhr am Ort $x$

$K'$ eine Uhr am Ort $x_1' = \gamma(x - vt_1)$

und " " " " $x_2' = \gamma(x - vt_2)$

Im anderen Fall (in $K'$ ruhendes Ereignis) benötigt $K'$ nur eine und $K$ zwei Uhren.

<u>Eigenzeit</u> $\Delta\tau$ = Zeitspanne, die von ein und derselben Uhr am gleichen Ort gemessen wird.

<u>Lorentz - Kontraktion</u>

Wir betrachten einen in $K$ ruhenden Stab mit den Endpunkten $(x_a, y, z)$ und $(x_b, y, z)$ und somit der Länge

$$l = |x_b - x_a|$$

Im $K'$ befinden sich die Endpunkte dann bei

$$x_a' = \gamma (x_a - v t_a) \quad \text{und} \quad x_b' = \gamma (x_b - v t_b)$$

$$\Rightarrow \quad x_b' - x_a' = \gamma (x_b - x_a) - \gamma v (t_b - t_a),$$

was von den Zeiten $t_b$ und $t_a$ abhängt.

Um die Länge in $K'$ zu bestimmen, müssen wir jedoch die Endpunkte zu gleichen Zeiten in $K'$ ablesen.

$$\Rightarrow \quad t_a' = \gamma \left(t_a - \frac{v}{c^2} x_a\right) \overset{!}{=} t_b' = \gamma \left(t_b - \frac{v}{c^2} x_b\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \gamma v (t_b - t_a) = \gamma \beta^2 (x_b - x_a)$$

$$\Rightarrow \quad x_b' - x_a' = \gamma (1 - \beta^2)(x_b - x_a) = \frac{1}{\gamma} (x_b - x_a)$$

$$\Rightarrow \quad \ell' = \frac{1}{\gamma} \ell$$

d.h. der in $K$ ruhende Stab ist in $K'$ um den Faktor $\frac{1}{\gamma}$ verkürzt.

## 10.5 Addition von Geschwindigkeiten

Wir betrachten drei Systeme $K$, $K'$ und $K''$, wobei sich $K'$ relativ zu $K$ mit Geschwindigkeit $v_1$ und $K''$ relativ zu $K'$ mit Geschwindigkeit $v_2$ in $x$-Richtung bewegen. Wie schnell bewegt sich $K''$ relativ zu $K$?

$$\Rightarrow \quad (\Lambda^\mu{}_\nu)_{K\to K'} = \begin{pmatrix} \cosh \chi_1 & -\sinh \chi_1 \\ -\sinh \chi_1 & \cosh \chi_1 \end{pmatrix}, \quad \tanh \chi_1 = \beta_1$$

$$(\Lambda^\mu{}_\nu)_{K'\to K''} = \begin{pmatrix} \cosh \chi_2 & -\sinh \chi_2 \\ -\sinh \chi_2 & \cosh \chi_2 \end{pmatrix}, \quad \tanh \chi_2 = \beta_2$$

wobei wir hier die y- und z-Komponenten weggelassen haben, um Schreibarbeit zu sparen.

Für die Transformation $K \to K''$ ergibt sich dann durch „Hintereinanderschalten" der beiden Transformationen

$$(\Lambda^\mu{}_\nu)_{K\to K''} = \begin{pmatrix} \cosh \chi_2 & -\sinh \chi_2 \\ -\sinh \chi_2 & \cosh \chi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \chi_1 & -\sinh \chi_1 \\ -\sinh \chi_1 & \cosh \chi_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(\chi_1+\chi_2) & -\sinh(\chi_1+\chi_2) \\ -\sinh(\chi_1+\chi_2) & \cosh(\chi_1+\chi_2) \end{pmatrix},$$

da $\cosh(\chi_1+\chi_2) = \cosh\chi_1 \cosh\chi_2 + \sinh\chi_1 \sinh\chi_2$
und $\sinh(\chi_1+\chi_2) = \sinh\chi_1 \cosh\chi_2 + \cosh\chi_1 \sinh\chi_2$

$\Rightarrow$ $K''$ hat von $K$ aus gesehen die Rapidität

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 ,$$

d.h. die Rapiditäten sind additiv!

Das gilt jedoch nicht für die Geschwindigkeiten:

Mit $\beta = \frac{v}{c} = \tanh \chi = \frac{e^{\chi} - e^{-\chi}}{e^{\chi} + e^{-\chi}}$

$\Leftrightarrow \quad \chi = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}$

kann man zeigen, dass

$$\beta = \tanh(\chi_1 + \chi_2) = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

- nichtrelativistischer Grenzfall: $\frac{v_1 v_2}{c^2} \ll 1$

  $\Rightarrow \quad v \approx v_1 + v_2$,

  wie man es naiv erwarten würde.

- Der Nenner verhindert, dass $v$ größer als $c$ werden kann, selbst wenn $v_1$ und $v_2$ schon nahe bei $c$ sind.

  Bsp.: $\beta_1 = \beta_2 = 0{,}9 \quad \Rightarrow \beta = \frac{1{,}8}{1{,}81} = 0{,}9945$

- Extremfall: $\beta_2 = 1 \quad \Rightarrow \beta = 1$

  Sowohl K' als auch K sehen K'' mit Lichtgeschwindigkeit, in Übereinstimmung mit dem Einstein'schen Postulat.