$$\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{v}\,(\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}}_{=0}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\,\vec{B}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\,\Phi'_M(t) = -\int_{A'} d\vec{\sigma}' \cdot \left(\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \times (\vec{v} \times \vec{B}'(\vec{r}', t))\right) = -\oint_{C'} d\vec{r}' \cdot (\vec{v} \times \vec{B}'(\vec{r}', t))$$

Ladung q bei $\vec{r}' =$ const. im Leiter

urspr. Koordinatensystem:

Lorentz-Kraft $\quad \vec{F}(t) = q\,\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}(\vec{r}', t)) = q\,\vec{v} \times \vec{B}'(\vec{r}', t)$

mitbewegtes System:

gleiche Kraft (Galilei-Invarianz) $\quad \vec{F}'(t) = \vec{F}(t)$

aber $\vec{v}' = \vec{0}$ $\Rightarrow$ keine Lorentz-Kraft

$\Rightarrow$ elektr. Kraft $\quad \vec{F}'(t) = q\,\vec{E}'(\vec{r}', t)$

$$\Rightarrow \vec{E}'(\vec{r}', t) = \vec{v} \times \vec{B}'(\vec{r}', t)$$

$$\Rightarrow U'_{ind} = \oint_{C'} d\vec{r}' \cdot \vec{E}'(\vec{r}', t') = \oint_{C'} d\vec{r}' \cdot (\vec{v} \times \vec{B}'(\vec{r}', t)) = -\frac{d}{dt}\,\Phi'_M(t)$$

$\Rightarrow$ Proportionalitätskonstante $= 1$!

- Das Faraday'sche Induktionsges. gilt allgemein für ruhende geschl. Wege und beliebige zeitabh. $\vec{B}$-Felder.

$$\Rightarrow \oint_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{E} = -\frac{d}{dt} \int_A d\vec{\sigma} \cdot \vec{B} = -\int_A d\vec{\sigma} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\int_A d\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \qquad \Rightarrow \int_A d\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = 0$$

A beliebig $\Rightarrow$ modifizierte Maxwell-Gl.: $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$

- verknüpft $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld
- zeitunabh. $\vec{B}$: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ (wie bisher)

9.2 Der Verschiebungsstrom und die vollständigen Maxwell-Gleichungen

Magnetostatik: $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = 0$ ✓

zeitabh. Fall: Kontinuitätsgl. $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} \overset{!}{\neq} \vec{j}$

$\hookrightarrow$ Ansatz Maxwell: $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_D$

$$\Rightarrow 0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_D = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_D$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_D = \frac{\partial}{\partial t} \rho = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Lösung: $\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ „Maxwell'scher Verschiebungsstrom"

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

zeitl. veränderliches elektr. Feld $\rightarrow$ Magnetfeld

(Induktionsges.: „ „ B-Feld $\rightarrow$ E-Feld)

<u>vollständige Maxwell-Gln. der Elektrodynamik</u>

$$\boxed{\begin{array}{lll} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho & \left.\right\} \text{inhomogene Maxwell-Gln.} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}} = \vec{j} & & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = \vec{0} \end{array}}$$

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = (1+\chi_e)\varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = (1+\chi_m)\mu_0 H = \mu_r \mu_0 \vec{H}$

9.3 Elektromagnetische Wellen

zeitabh. E-Feld $\rightleftarrows$ zeitabh. B-Feld

$\Rightarrow$ E- und B-Felder können auch ohne Ladungen und Ströme existieren

Vakuum: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

$\hookrightarrow$ Maxwell-Gln. für $\rho = 0$ und $\vec{j} = \vec{0}$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \dot{\vec{E}}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \dot{\vec{B}} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\vec{E}} \\ \qquad \shortparallel \\ \vec{\nabla} (\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_{=\vec{0}}) - \Delta \vec{E} \end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\vec{E}} = \Delta \vec{E}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \varepsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \times \dot{\vec{E}} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\vec{B}} \\ \qquad \shortparallel \\ \vec{\nabla} (\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}}_{=0}) - \Delta \vec{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\vec{B}} = \Delta \vec{B}$$

„Wellengleichungen":

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{0} \\ \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \vec{B}(\vec{r},t) &= \vec{0} \end{aligned}}$$

$$c := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2{,}99792458 \cdot 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Lichtgeschwindigkeit!

D'Alembert-Operator: $\square := \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$

$$\Rightarrow \quad \square\, \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{0}, \qquad \square\, \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{0}$$

$\hat{=}$ 6 unabh. Dgln. $\quad \square\, \Psi(\vec{r},t) = 0, \quad \Psi \in \{E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z\}$

Exponentialansatz: $\Psi(\vec{r},t) = \Psi_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$

Ψ_0: Amplitude

$\vec{k}$: Wellenvektor, $k = |\vec{k}|$: Wellenzahl

ω: Kreisfrequenz

$$\Rightarrow \quad \square\,\Psi = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\Psi = \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2\right)\Psi \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega = c\,|\vec{k}| = ck$$

(„Dispersionsrelation")

physikal. sinnvolle Lösung: $\mathrm{Re}\,\Psi(\vec{r},t)$ (ist auch Lösung von $\square\Psi = 0$.)