Ladungserhaltung

Q_V = Gesamtladung im Volumen V

$I_{\partial V}$ = Stärke des durch die Oberfläche aus V herausströmenden Stroms

Ladungserhaltung: $\frac{dQ_V}{dt} = -I_{\partial V}$

$$\frac{dQ_V}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V d^3r\ \rho(\vec{r},t) = \int_V d^3r\ \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$I_{\partial V} = \int_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) = \int_V d^3r\ \vec{\nabla}\cdot\vec{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0}$$ „Kontinuitätsgleichung"

Magnetostatik: $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$

$\Rightarrow$ $I_{\partial V} = 0$ Es fließen pro Zeit gleich viele Ladungen in ein Volumen hinein wie heraus.

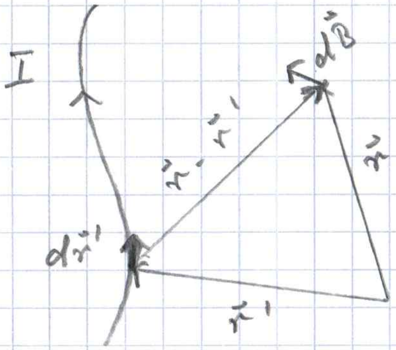
Konsequenzen:
- gleichbleibende Stromstärke entlang eines Leiters, auch bei nicht-konstantem Querschnitt.
- Kirchhoff'sche Knotenregel

7.2 Magnetische Induktion

Elektrostatik: Ladungen $\rightarrow$ $\vec{E}$ - Feld $\rightarrow$ Kraft auf (andere) Ladungen

Magnetostatik: Ströme $\rightarrow$ $\vec{B}$ - Feld $\rightarrow$ " " " Ströme

Biot - Savart'sches Gesetz:



Ein infinitesimales Stück $d\vec{r}'$
eines Stromfadens mit Stromstärke I bei $\vec{r}'$
erzeugt am Ort $\vec{r}$ das infinitesimale Feld

$$\boxed{d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \, d\vec{r}' \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}$$

- $\mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$ „magnetische Feldkonstante"

  war bis Mai 2019 auf diesen Wert festgelegt (Def. des Ampère),
  jetzt Messgröße ($\leftrightarrow \varepsilon_0$)

- $\vec{B}$: „magnetische Induktion"

  Vakuum: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, $\vec{H}$: „Magnetfeld"

- Analogie zur Elektrostatik (Coulomb-Gesetz):

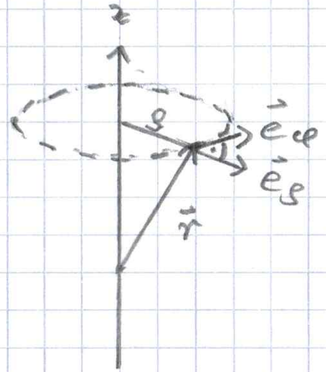
  $\vec{E} \leftrightarrow d\vec{B}$, $\frac{1}{\varepsilon_0} \leftrightarrow \mu_0$, $q \leftrightarrow I\, d\vec{r}'$, Produkt $\leftrightarrow$ Vektorprodukt

Stromelement $I\,d\vec{r}\,'$ theoret. Gedankenkonstrukt

↳ geschlossene Leiterschleife:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C d\vec{r}\,' \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}}$$

<u>Beispiel:</u> unendlich langer gerader Leiter

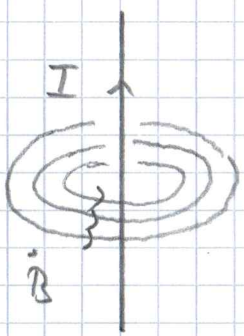


$$\vec{r} = \varrho\,\vec{e}_\varrho + z\,\vec{e}_z$$

$$\vec{r}\,' = z'\,\vec{e}_z \quad , \quad d\vec{r}\,' = dz'\,\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}-\vec{r}\,' = \varrho\,\vec{e}_\varrho + (z-z')\,\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \quad d\vec{r}\,' \times (\vec{r}-\vec{r}\,') = \varrho\,dz'\,\vec{e}_z \times \vec{e}_\varrho = \varrho\,dz'\,\vec{e}_\varphi$$



$$\Rightarrow \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\varrho}{(\varrho^2 + (z-z')^2)^{3/2}}\,\vec{e}_\varphi$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\varrho}\,\vec{e}_\varphi$$

konzentrische Kreise (perfektes Wirbelfeld)

$$I\, d\vec{r}\,' = \vec{j}(\vec{r}\,')\, dA\, dr' = \vec{j}(\vec{r}\,')\, d^3r'$$

$\Rightarrow$ allgemeine Form des Biot-Savart'schen Gesetzes:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r'\; \vec{j}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}}$$

Analogie zur Elektrostatik:

$$\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}, \quad \frac{1}{\varepsilon_0} \leftrightarrow \mu_0, \quad \rho(\vec{r}\,') \leftrightarrow \vec{j}(\vec{r}\,') \times$$

<u>Ampère'sches Kraftgesetz:</u>

Ein statisches $\vec{B}$-Feld übt auf ein infinitesimales Stück $I\,d\vec{r}$ eines Stromfadens die Kraft

$$\boxed{d\vec{F} = I\, d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r})}$$

aus.

$\Rightarrow$ Gesamtkraft auf den Stromfaden:

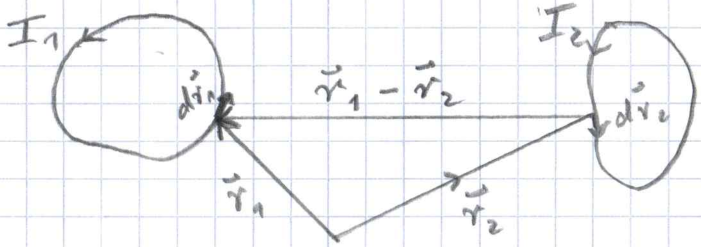
$$\vec{F} = \int_C I\, d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r})$$

beliebige Stromverteilung:
$$\boxed{\vec{F} = \int_V d^3r \; \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})}$$

Punktladung: $\vec{j}_p(\vec{r}, t) = q\, \vec{v}_p\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_p(t))$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = q\, \vec{v}_p \times \vec{B}(\vec{r}_p) \qquad \text{Lorentz-Kraft !}$$

<u>Beispiel</u>: zwei Stromschleifen mit Strömen I_1 und I_2



$\vec{B}$-Feld von $I_2 d\vec{r}_2$ am Ort $\vec{r}_1$:

$$d\vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2\, d\vec{r}_2 \times \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

Kraft auf Stromelement $I_1 d\vec{r}_1$:

$$d\vec{F}_{12} = I_1\, d\vec{r}_1 \times d\vec{B}_2$$

$\hookrightarrow$ Kraft der Leiterschleife 2 auf Leiterschleife 1:

$$\vec{F}^{(12)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} d\vec{r}_1 \times \left(\oint_{C_2} d\vec{r}_2 \times \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Skript}}}{=} -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} d\vec{r}_1 \cdot \oint_{C_2} d\vec{r}_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

magnetostat. Analogon zum Coulomb-Gesetz

7.3 Grundgleichungen der Magnetostatik

7.3.1 Das Vektorpotenzial

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3r'\, \vec{j}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3r'\, \vec{j}(\vec{r}\,') \times \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3r'\, \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \times \vec{j}(\vec{r}\,')$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})} \quad \text{mit} \quad \boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$

„Vektorpotenzial"

Analogie zur Elektrostatik:

$\phi \leftrightarrow \vec{A}$, $\quad \frac{1}{\varepsilon_0} \leftrightarrow \mu_0$, $\quad \rho \leftrightarrow \vec{j}$

$\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$, $\quad -\vec{\nabla} \leftrightarrow \vec{\nabla}\times$

7.3.2 Eichung

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, $\qquad \phi' = \phi + \text{const.} \quad \Rightarrow \vec{E}' = -\vec{\nabla}\phi' = \vec{E}$

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Es gilt $\quad \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\Psi(\vec{r}) = 0 \quad$ für beliebige $\Psi(\vec{r})$

zu $\quad \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Psi \quad \Rightarrow \quad \vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{B}$

Die Ersetzung $\quad \vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Psi \quad$ nennt man „<u>Eichtransformation</u>"

↪ allgemeiner Ausdruck für $\vec{A}$:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{\nabla}\Psi(\vec{r}) \quad , \quad \Psi(\vec{r}) \text{ beliebiges Skalarfeld}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \Delta\Psi(\vec{r})$$

↪ Wir können durch die Wahl von $\Psi(\vec{r})$ die Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})$ auf jede beliebige Form bringen.

„<u>Coulomb - Eichung</u>": $\quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \overset{!}{=} \vec{0}$

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \, \vec{j}(\vec{r}\,') \cdot \underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{-\vec{\nabla}_{\vec{r}\,'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \, \underbrace{\left(\vec{\nabla}_{\vec{r}\,'} \cdot \vec{j}(\vec{r}\,')\right)}_{\substack{=0 \\ \text{in der Magnetostatik}}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \text{Oberflächenterme}$$

$$\text{Oberflächenterme} \sim \int_{\partial V} d\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Die Oberflächenterme verschwinden, wenn keine Ströme durch ∂V fließen, insbesondere im unendlichen Raum.

2) Magnetostatik im unendl. Raum:

Coulomb-Eichung ist schon für $\Psi = 0$ realisiert.