6.7 Randwertprobleme der Elektrostatik

Poisson-Gl.: $\Delta \phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r})$

spez. Lösung: $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \rho(\vec{r}\,') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$

- korrekte Lösung, wenn keine Randbedingungen im Endlichen vorliegen
- i.A. nicht eindeutig

Randwertproblem:

- $\rho(\vec{r})$ nur innerhalb eines (endl. oder unendl.) Raumbereichs V bekannt
- Die Lösung ist dann (evtl. bis auf eine physikal. irrelevante Konstante) eindeutig, wenn eine der folgenden Randbedingungen vorgegeben ist:

- „Dirichlet'sche Randbedingungen":

  $\phi(\vec{r})$ ist auf dem Rand ∂V vorgegeben

- „Neumann'sche Randbedingungen":

  $\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \equiv \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{n}$ ist auf ∂V vorgegeben

  $= -\vec{E} \cdot \vec{n} = -E^{(n)}$

Beweis der Eindeutigkeit

- $u(\vec{r})$, $v(\vec{r})$ Skalarfelder $\Rightarrow$ $u\vec{\nabla}v$ = Vektorfeld

$$\int_V d^3r \; \vec{\nabla}\cdot(u\vec{\nabla}v) \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} d\vec{\sigma}\cdot(u\vec{\nabla}v) \equiv \int_{\partial V} df \; \vec{n}\cdot(u\vec{\nabla}v) \quad , \quad d\vec{\sigma} = \vec{n}\, df$$

$$\vec{\nabla}\cdot(u\vec{\nabla}v) = (\vec{\nabla}\vec{u})\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) + u\Delta v$$

$$\vec{n}\cdot(u\vec{\nabla}v) = u\,\vec{n}\cdot\vec{\nabla}v = u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}$$

$$\Rightarrow \int_V d^3r\left((\vec{\nabla}\cdot u)\cdot(\vec{\nabla}v) + u\Delta v\right) = \int_{\partial V} df\; u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}$$ 1. Green'sche Identität

- Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ in V, zwei Lösungen $\Delta\phi_i(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})$, $i=1,2$, $\vec{r}\in V$

$$\psi(\vec{r}) := \phi_1(\vec{r}) - \phi_2(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \Delta\phi(\vec{r}) = 0 \quad , \quad \vec{r}\in V$$

$$u = v = \psi \quad \Rightarrow \quad \int_V d^3r\Big(\underbrace{(\vec{\nabla}\psi)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\psi\Delta\psi}_{=0}\Big) = \int_{\partial V} df\;\psi\frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Dirichlet:} & \psi = 0 & \text{auf } \partial V \\ \text{Neumann:} & \frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}} = 0 & \text{" \quad "} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_V d^3r\,(\vec{\nabla}\psi)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\psi(\vec{r}) = 0 \quad \forall\,\vec{r}\in V$$

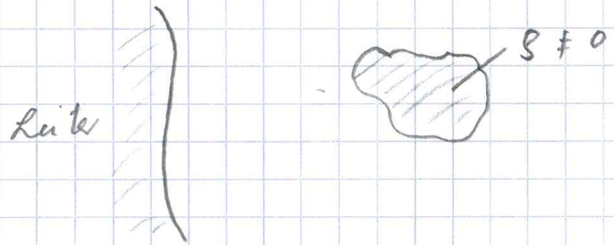
$$\Rightarrow \quad \psi(\vec{r}) = \phi_1(\vec{r}) - \phi_2(\vec{r}) = \text{const.} \qquad \forall \vec{r} \in V$$

d.h. ϕ ist bis auf eine Konstante (= 0 für Dirichlet) eindeutig.

$\Rightarrow$ $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ ist eindeutig.

<u>physikalische Relevanz</u>

Beispiel: Ladungsverteilung vor einer ideal leitenden Wand



Ladungen im Leiter verschieben sich bis Gleichgewicht herrscht

$$\Rightarrow \vec{E}_{innen} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \phi_{innen} = \text{const.}$$

Oberfläche: Flächenladungsdichte $\sigma(\vec{r})$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{aligned} E^{(n)}_{außen} &= \frac{\sigma(\vec{r})}{\varepsilon_0} \\ \vec{E}^{(t)}_{außen} &= \vec{0} \end{aligned}\right\} \vec{E}_{außen} \perp \text{Leiter}$

- Falls $\sigma(\vec{r})$ bekannt $\Rightarrow$ $E^{(n)}_{außen} = -\frac{\partial \phi}{\partial n}$ bekannt

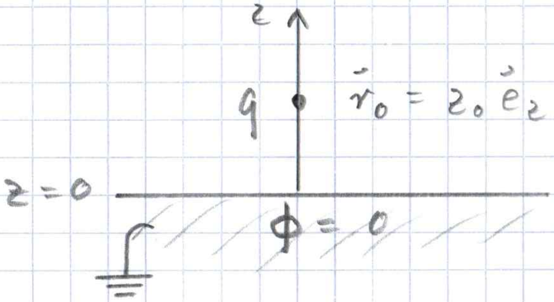
  $\hat{=}$ Neumann

- $\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{E}(\vec{r}\,')$ stetig $\Rightarrow$ $\phi(\vec{r})_{Rand} = \phi_{innen} = \text{const.}$

  $\hat{=}$ Dirichlet

Spiegelladungsmethode

Bsp.: Punktladung über unendl. ausgedehnter Metallplatte (geerdet)



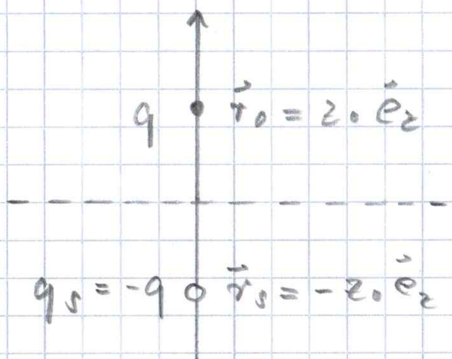
$\Rightarrow \phi\big|_{z \leq 0} = 0$

gesucht: $\phi(\vec r)$ im Bereich $z > 0$

mit $\Delta \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{q}{\varepsilon_0}\, \delta(\vec r - \vec r_0)$

und Randbed. $\phi\big|_{z=0} = 0$

Trick: Ersetze Metallplatte durch fiktive „Spiegelladung" $q_s = -q$ bei $\vec r = \vec r_s = -z_0 \vec e_z$, so dass die Randbedingung erfüllt ist:



$$\Rightarrow \phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{|\vec r - \vec r_0|} - \frac{q}{|\vec r + \vec r_0|}\right)$$

$$\Rightarrow \phi(x,y,z=0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ korrekte Randbedingung ✓

wichtig: keine Änderung der Ladungsverteilung für $z > 0$

Eindeutigkeit des Randwertproblems $\Rightarrow$ korrekte Lösung des ursprüngl. Problems für $z > 0$.

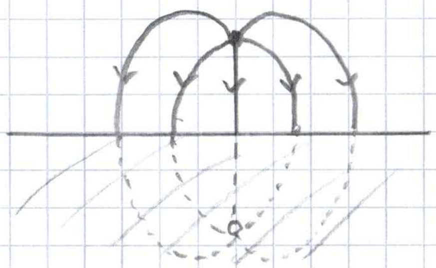
Dagegen ist die Lösung im Bereich $z < 0$ nicht korrekt:

fiktiver Ladungswert.: q_s bei $\vec{r} = \vec{r}_s$

tatsächl. " : Flächenladung an der Oberfläche des Leiters

$\vec{E}$-Feld: $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} - \frac{\vec{r}+\vec{r}_0}{|\vec{r}+\vec{r}_0|^3}\right)$ für $z > 0$

$z = 0$: $\vec{r} \pm \vec{r}_0 = (x, y, \pm z_0)^T$



$\Rightarrow \vec{E}_{außen}(x,y,z=0) = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{z_0}{(x^2+y^2+z_0^2)^{3/2}}\,\vec{e}_z \perp$ Platte

$\vec{E}_{innen} = 0$

$\Rightarrow \sigma(x,y) = \varepsilon_0\left(\vec{E}_{außen}(x,y,0) - \vec{E}_{innen}(x,y,0)\right)\cdot\vec{e}_z$

$= -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{z_0}{(x^2+y^2+z_0^2)^{3/2}}$

induzierte Gesamtladung:

$Q_{ind} := \int_{z=0} df\,\sigma(x,y) \underset{\uparrow}{=} -q = q_s$

s. Skript