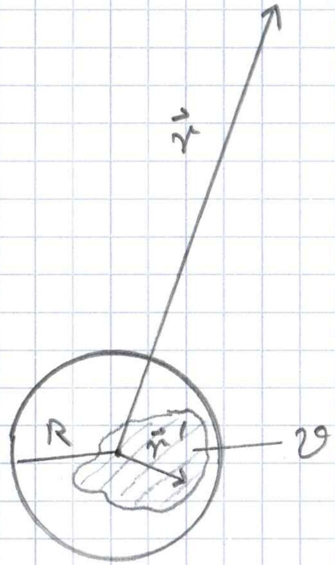
6.6 Multipolentwicklung



räumlich lokalisierte Ladungsverteilung:

$$\rho(\vec{r}) = 0 \quad \text{für} \quad \vec{r} \notin V \subset K$$

K: Kugel mit Radius R um Ursprung

gesucht: $\phi(\vec{r})$ für $r \gg R$

exakter Ausdruck (sofern keine Randbedingungen im Endlichen):

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d^3r' \, \rho(\vec{r}\,') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$r \gg R \Rightarrow r' \ll r \rightsquigarrow$ Taylor-Entwicklung von $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$ um $\vec{r}\,' = \vec{0}$

Ergebnis (→ Skript): $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\,' \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{3(\vec{r}\,' \cdot \vec{r})^2 - r'^2 r^2}{2r^5} + \ldots$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Bigg\{ \frac{1}{r} \underbrace{\int d^3r' \, \rho(\vec{r}\,')}_{Q} + \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \int d^3r' \, \vec{r}\,' \rho(\vec{r}\,')$$

$$+ \frac{1}{2r^5} \int d^3r' \underbrace{\left(3(\vec{r} \cdot \vec{r}\,')^2 - r^2 r'^2\right)}_{\sum_{ij} r_i r_j (3 r_i' r_j' - r'^2 \delta_{ij})} \rho(\vec{r}\,') + \ldots \Bigg\}$$

$$\Rightarrow \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{Q}{r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2}\sum_{ij} Q_{ij} \frac{r_i r_j}{r^5} + \dots \right\}$$

„Multipolentwicklung"

<u>Multipolmomente:</u>

$Q = \int d^3r' \, \varrho(\vec{r}')$ (Monopolmoment = Gesamtladung)

$\vec{p} = \int d^3r' \, \vec{r}' \varrho(\vec{r}')$ (Dipolmoment)

$Q_{ij} = \int d^3r' \, (3 r_i' r_j' - r'^2 \delta_{ij}) \varrho(\vec{r}')$ (Quadrupolmomente)

Beiträge zu ϕ:

- Monopol $\sim \frac{1}{r}$
- Dipol $\sim \frac{1}{r^2}$
- Quadrupol $\sim \frac{1}{r^3}$

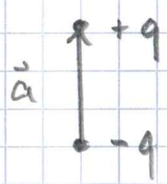
$\vdots$

sehr große Entfernung: $\qquad \phi(\vec r) \approx \phi_{Punkt}(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}$

falls $Q = 0$: $\qquad \phi(\vec r) \approx \phi_D(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec p \cdot \vec r}{r^3}$

...

<u>Beispiel:</u>



$$\rho(\vec r) = q\left(\delta(\vec r - \vec a) - \delta(\vec r)\right)$$

$$\Rightarrow \vec p = q\vec a - q\vec 0 = q\vec a$$

Hat diese Konstellation ein Quadrupolmoment?

Betrachte $\vec a = a\,\vec e_z \quad \Rightarrow \rho(\vec r) = q\,\delta(x)\,\delta(y)\left(\delta(z-a) - \delta(z)\right)$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} Q_{11} = q(3\cdot 0 - a^2) = Q_{22} \\ Q_{33} = q(3a^2 - a^2) = 2a^2 q \\ Q_{ij} = 0 \quad \text{für } i \neq j \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{Q}} = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix} q$$

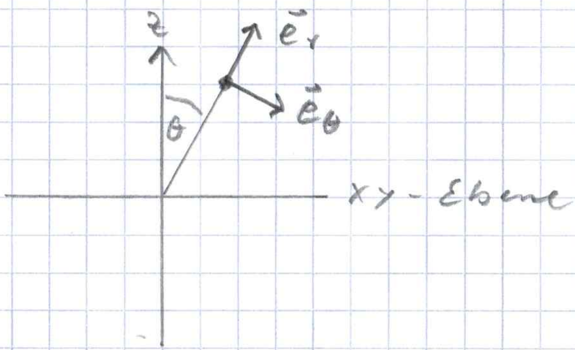
$$\Rightarrow \underline{\underline{Q}} \neq 0$$

Aber: $\vec p \sim a$, $\underline{\underline{Q}} \sim a^2$ $\rightsquigarrow$ idealer Dipol für a infinitesimal

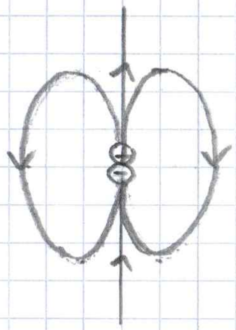
$\vec{E}$ - Feld eines reinen Dipols: $\vec{E}_D(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(3\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right)$

Beispiel:

$$\vec{p} = p\,\vec{e}_z \overset{\text{Skript}}{\Rightarrow} \vec{E}_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\left(2\cos\theta\,\vec{e}_r + \sin\theta\,\vec{e}_\theta\right)$$



$\rightsquigarrow$



$\theta = 0: \quad \vec{E}_D \sim 2\vec{e}_r(0) = 2\vec{e}_z$

$\theta = \frac{\pi}{2}: \quad \vec{E}_D \sim \vec{e}_\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\vec{e}_z$

$\theta = \pi: \quad \vec{E}_D \sim -2\vec{e}_r(\pi) = 2\vec{e}_z$

- punktsymmetr. Ladungsverteilungen: $\rho(\vec{r}) = \rho(-\vec{r})$

$$\Rightarrow \vec{p} = \int d^3r\,\vec{r}\,\rho(\vec{r}) \overset{\vec{r}' := -\vec{r}}{=} \int d^3r'\,(-\vec{r}')\,\rho(-\vec{r}') = -\int d^3r'\,\vec{r}'\,\rho(\vec{r}') = -\vec{p}$$

$\Rightarrow \vec{p} = \vec{0}$ Punktsymmetrische Ladungsverteilungen besitzen kein Dipolmoment.

<u>Quadrupoltensor</u> : $Q_{ij} = \int d^3r \, (3 r_i r_j - r^2 \delta_{ij}) \, \rho(\vec{r})$

- symmetrisch : $Q_{ij} = Q_{ji}$
- Spur : $\sum_{i=1}^{3} Q_{ii} = \int d^3r \, \rho(\vec{r}) \underbrace{\sum_i (3 r_i^2 - r^2)}_{3(x^2+y^2+z^2) - 3r^2 = 0} = 0$

} 5 unabh. Komponenten

- kugelsymm. Ladungsverteilung : $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$, $r = |\vec{r}|$

$\Rightarrow Q_{ij} = 0$ für $i \neq j$ (z. B. $Q_{12} = 3 \int dx \int dy \int dz \underbrace{x y \, \rho(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}_{\text{antisymmetrisch in } x \text{ und } y} = 0$)

$Q_{11} = Q_{22} = Q_{33}$ (keine Richtung ausgezeichnet)

$\Rightarrow 0 = \sum_i Q_{ii} = 3 Q_{11} \Rightarrow Q_{ii} = 0$

$\curvearrowright$ Für kugelsymm. Ladungsverteilungen gilt $\underline{\underline{Q}} = 0$