- $W = \frac{1}{2}\int d^3r\,\rho(\vec{r})\phi(\vec{r}) \overset{\text{Poisson}}{=} -\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\,\phi(\vec{r})\,\triangle\,\phi(\vec{r})$

- $W = \frac{1}{2} \int d^3r \, \rho(\vec{r})\phi(\vec{r}) \overset{\text{Poisson}}{=} -\frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \, \phi(\vec{r}) \triangle \phi(\vec{r})$
- Produktregel: $\vec{\nabla} \cdot \left(\phi\vec{\nabla}\phi\right) = (\vec{\nabla}\phi) \cdot (\vec{\nabla}\phi) + \phi \triangle \phi$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $W = \frac{1}{2}\int d^3r\,\rho(\vec{r})\phi(\vec{r}) \overset{\text{Poisson}}{=} -\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\,\phi(\vec{r}) \triangle \phi(\vec{r})$
- Produktregel: $\vec{\nabla}\cdot\left(\phi\vec{\nabla}\phi\right) = (\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\phi) + \phi \triangle \phi$

$$\Rightarrow \quad W = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\,\vec{\nabla}\cdot\left(\phi(\vec{r})\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\right) + \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\,\underbrace{\left(\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\right)^2}_{=\vec{E}^{\,2}}$$

- $W = \frac{1}{2}\int d^3r\, \rho(\vec{r})\phi(\vec{r}) \overset{\text{Poisson}}{=} -\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\, \phi(\vec{r}) \triangle \phi(\vec{r})$

- Produktregel: $\vec{\nabla}\cdot\left(\phi\vec{\nabla}\phi\right) = (\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\phi) + \phi \triangle \phi$

$$\Rightarrow\quad W = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\, \vec{\nabla}\cdot\left(\phi(\vec{r})\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\right) + \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\, \underbrace{\left(\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\right)^2}_{=\vec{E}^{\,2}}$$

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r\, \vec{\nabla}\cdot\left(\phi(\vec{r})\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\right) = \int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma}\cdot\left(\phi(\vec{r})\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\right) \overset{\mathcal{V}\to\mathbb{R}^3}{=} 0$$

für räumlich lokalisierte Ladungsverteilungen

- $W = \frac{1}{2}\int d^3r\, \rho(\vec{r})\phi(\vec{r}) \overset{\text{Poisson}}{=} -\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\, \phi(\vec{r}) \triangle \phi(\vec{r})$
- Produktregel: $\vec{\nabla}\cdot\left(\phi\vec{\nabla}\phi\right) = (\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\phi) + \phi \triangle \phi$

$\Rightarrow$ $W = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\, \vec{\nabla}\cdot\left(\phi(\vec{r})\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\right) + \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\, \underbrace{\left(\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\right)^2}_{=\vec{E}^{\,2}}$

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r\, \vec{\nabla}\cdot\left(\phi(\vec{r})\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\right) = \int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma}\cdot\left(\phi(\vec{r})\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\right) \overset{\mathcal{V}\to\mathbb{R}^3}{=} 0$$

für räumlich lokalisierte Ladungsverteilungen

$\Rightarrow$ $\boxed{W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\, \vec{E}^{\,2}(\vec{r})}$

- $W = \frac{1}{2}\int d^3r\,\rho(\vec{r})\phi(\vec{r}) \overset{\text{Poisson}}{=} -\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\,\phi(\vec{r})\,\triangle\,\phi(\vec{r})$
- Produktregel: $\vec{\nabla}\cdot\left(\phi\vec{\nabla}\phi\right) = (\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\phi) + \phi\,\triangle\,\phi$

$\Rightarrow$ $W = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\,\vec{\nabla}\cdot\left(\phi(\vec{r})\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\right) + \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\,\underbrace{\left(\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\right)^2}_{=\vec{E}^{\,2}}$

$\int_{\mathcal{V}} d^3r\,\vec{\nabla}\cdot\left(\phi(\vec{r})\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\right) = \int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma}\cdot\left(\phi(\vec{r})\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\right) \overset{\mathcal{V}\to\mathbb{R}^3}{=} 0$ für räumlich lokalisierte Ladungsverteilungen

$\Rightarrow$ $\boxed{W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\,\vec{E}^{\,2}(\vec{r})} = \int d^3r\,w(\vec{r})$,

$w(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\,\vec{E}^{\,2}(\vec{r})$ Energiedichte des elektrostatischen Feldes

- **Beispiel:** homogen geladene Kugel (Radius R, Ladung Q)

Übung: $W_{\text{Kugel}} = \frac{3}{20\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{R}$

- **Beispiel:** homogen geladene Kugel (Radius R, Ladung Q)

  Übung: $W_{\text{Kugel}} = \frac{3}{20\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{R}$

- Punktladung: $W_{\text{Punkt}} = \lim\limits_{R\to 0} W_{\text{Kugel}} \;\to\; \infty$

- **Beispiel:** homogen geladene Kugel (Radius R, Ladung Q)

  Übung: $W_{\text{Kugel}} = \frac{3}{20\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{R}$

- Punktladung: $W_{\text{Punkt}} = \lim\limits_{R\to 0} W_{\text{Kugel}} \rightarrow \infty$

  - „klassischer Elektronenradius": $\frac{3}{20\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{R_e} = m_e c^2 \Rightarrow R_e \sim 10^{-15}$ m
  - experimentelle Obergrenze: $R_e < 10^{-19}$ m

- **Beispiel:** homogen geladene Kugel (Radius R, Ladung Q)

  Übung: $W_{\text{Kugel}} = \frac{3}{20\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q^2}{R}$

- Punktladung: $W_{\text{Punkt}} = \lim\limits_{R\to 0} W_{\text{Kugel}} \;\to\; \infty$

  - „klassischer Elektronenradius": $\frac{3}{20\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q^2}{R_e} = m_e c^2 \quad\Rightarrow\quad R_e \sim 10^{-15}$ m
  - experimentelle Obergrenze: $R_e < 10^{-19}$ m

- pragmatischer Standpunkt:

  - Die (unendlich große) Selbsteneregie wurde bei der Erzeugung der Teilchen irgendwie aufgebracht, spielt danach aber keine Rolle, solange die Teilchen stabil bleiben.

- **Beispiel:** homogen geladene Kugel (Radius R, Ladung Q)

  Übung: $W_{\text{Kugel}} = \frac{3}{20\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{R}$

- Punktladung: $W_{\text{Punkt}} = \lim_{R \to 0} W_{\text{Kugel}} \to \infty$
  - „klassischer Elektronenradius": $\frac{3}{20\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{R_e} = m_e c^2 \Rightarrow R_e \sim 10^{-15}$ m
  - experimentelle Obergrenze: $R_e < 10^{-19}$ m

- pragmatischer Standpunkt:
  - Die (unendlich große) Selbsteneregie wurde bei der Erzeugung der Teilchen irgendwie aufgebracht, spielt danach aber keine Rolle, solange die Teilchen stabil bleiben.
  - Ähnliche Divergenzen treten auch in der Quantenfeldtheorie auf, wo sie in gewisser Wewise analog behandelt werden.

- N Punktladungen: $\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i(\vec{r})$

$$\Rightarrow \; W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \, \vec{E}^2(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \int d^3r \, \vec{E}_i(\vec{r}) \cdot \vec{E}_j(\vec{r})$$

- N Punktladungen: $\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i(\vec{r})$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r\, \vec{E}^2(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \int d^3r\, \vec{E}_i(\vec{r}) \cdot \vec{E}_j(\vec{r})$$

$$\equiv \sum_{i,j=1}^{N} W_{ij} = W_{\mathrm{selbst}} + W_{\mathrm{WW}}$$

  - $W_{\mathrm{selbst}} = \sum_{i=1}^{N} W_{ii}$ (divergent)
  - $W_{\mathrm{WW}} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} W_{ij}$ = unser ursprünglicher Ausdruck für Punktladungen

- N Punktladungen: $\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i(\vec{r})$

$$\Rightarrow \; W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \, \vec{E}^2(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \int d^3r \, \vec{E}_i(\vec{r}) \cdot \vec{E}_j(\vec{r})$$

$$\equiv \sum_{i,j=1}^{N} W_{ij} = W_{\text{selbst}} + W_{\text{WW}}$$

  - $W_{\text{selbst}} = \sum_{i=1}^{N} W_{ii}$ (divergent)
  - $W_{\text{WW}} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} W_{ij}$ = unser ursprünglicher Ausdruck für Punktladungen

$\longrightarrow$ Es gilt immer $W \geq 0$, während W_{WW} auch negativ sein kann.