TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Ziel: Bestimme div $\vec{E}$ und rot $\vec{E}$

Ziel: Bestimme div $\vec{E}$ und rot $\vec{E}$

- rot $\vec{E} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{0}$

Ziel: Bestimme div $\vec{E}$ und rot $\vec{E}$

- rot $\vec{E} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{0}$
- div $\vec{E} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = -\triangle\,\phi$
  - Laplace-Operator: $\triangle = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Ziel: Bestimme div $\vec{E}$ und rot $\vec{E}$

- rot $\vec{E} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{0}$
- div $\vec{E} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = -\triangle\,\phi$
  - Laplace-Operator: $\triangle = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\triangle \int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\triangle_{\vec{r}}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Ziel: Bestimme div $\vec{E}$ und rot $\vec{E}$

- rot $\vec{E} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{0}$
- div $\vec{E} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = -\triangle\,\phi$
  - Laplace-Operator: $\triangle = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\triangle \int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\triangle_{\vec{r}}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Beh.: $\triangle_{\vec{r}}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$

Ziel: Bestimme div $\vec{E}$ und rot $\vec{E}$

- rot $\vec{E} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{0}$
- div $\vec{E} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = -\triangle\,\phi$
  - Laplace-Operator: $\triangle = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\ \triangle \int d^3r'\ \rho(\vec{r}\,')\ \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\ \int d^3r'\ \rho(\vec{r}\,')\ \triangle_{\vec{r}}\ \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Beh.: $\triangle_{\vec{r}}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$

Dazu zeigen wir

(i) $\triangle_{\vec{r}}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = 0,\quad$ falls $\vec{r} \neq \vec{r}\,'$

(ii) $\int\limits_{\mathcal{V}} d^3r\ \triangle_{\vec{r}}\ \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi,\quad$ falls $\vec{r}\,' \in \mathcal{V}$

(i) $\underline{\vec{r} \neq \vec{r}\,'}$

(i) $\underline{\vec{r} \neq \vec{r}\,'}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}_{\vec{r}}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-1/2}$$

(i) $\underline{\vec{r} \neq \vec{r}\,'}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-1/2}$$

$$= -\frac{1}{2} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-3/2} \begin{pmatrix} 2(x-x') \\ 2(y-y') \\ 2(z-z') \end{pmatrix}$$

(i) $\underline{\vec{r} \neq \vec{r}\,'}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-1/2}$$

$$= -\frac{1}{2} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-3/2} \begin{pmatrix} 2(x-x') \\ 2(y-y') \\ 2(z-z') \end{pmatrix} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

(i) $\underline{\vec{r} \neq \vec{r}\,'}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-1/2}$$

$$= -\frac{1}{2} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-3/2} \begin{pmatrix} 2(x-x') \\ 2(y-y') \\ 2(z-z') \end{pmatrix} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$\Rightarrow \quad \triangle_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{r_i - r_i'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

(i) $\underline{\vec{r} \neq \vec{r}\,'}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-1/2}$$

$$= -\frac{1}{2} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-3/2} \begin{pmatrix} 2(x-x') \\ 2(y-y') \\ 2(z-z') \end{pmatrix} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$\Rightarrow \quad \triangle_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{r_i - r_i'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$= -\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} - 3\frac{(r_i - r_i')^2}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5} \right)$$

(i) $\underline{\vec{r} \neq \vec{r}\,'}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-1/2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-3/2} \begin{pmatrix} 2(x-x') \\ 2(y-y') \\ 2(z-z') \end{pmatrix} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$\Rightarrow \quad \triangle_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{r_i - r_i'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$= -\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} - 3\frac{(r_i - r_i')^2}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5} \right)$$

$$= -3\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} + 3\,\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')^2}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5}$$

(i) $\underline{\vec{r} \neq \vec{r}\,'}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-1/2}$$

$$= -\frac{1}{2} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-3/2} \begin{pmatrix} 2(x-x') \\ 2(y-y') \\ 2(z-z') \end{pmatrix} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$\Rightarrow \quad \triangle_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{r_i - r_i'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$= -\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} - 3\frac{(r_i - r_i')^2}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5} \right)$$

$$= -3 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} + 3 \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')^2}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5} \qquad = 0 \quad \checkmark$$

(ii) $\underline{\vec{r}\,' \in \mathcal{V}}$ z.z.: $\int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \; \triangle_{\vec{r}} \; \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi$

(ii) $\underline{\vec{r}\,' \in \mathcal{V}}$ z.z.: $\int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \; \triangle_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi$

Koordinatenwahl: $\vec{r}\,' = \vec{0}$, $\mathcal{V}$: Volumen, das $\vec{r} = \vec{0}$ enthält

(ii) $\underline{\vec{r}' \in \mathcal{V}}$ z.z.: $\int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \triangle_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi$

Koordinatenwahl: $\vec{r}' = \vec{0}$, $\mathcal{V}$: Volumen, das $\vec{r} = \vec{0}$ enthält

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \triangle_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \triangle \, \frac{1}{r}$$

(ii) $\underline{\vec{r}' \in \mathcal{V}}$ z.z.: $\int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \; \triangle_{\vec{r}} \; \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi$

Koordinatenwahl: $\vec{r}' = \vec{0}$, $\mathcal{V}$: Volumen, das $\vec{r} = \vec{0}$ enthält

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \; \triangle_{\vec{r}} \; \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \; \triangle \; \frac{1}{r} \overset{(i)}{=} \int\limits_{\mathcal{K}} d^3r \; \triangle \; \frac{1}{r}$$

mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$: Kugel mit Mittelpunkt $\vec{r} = 0$ und Radius R

(ii) $\underline{\vec{r}' \in \mathcal{V}}$ z.z.: $\int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \; \triangle_{\vec{r}} \; \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi$

Koordinatenwahl: $\vec{r}' = \vec{0}$, $\mathcal{V}$: Volumen, das $\vec{r} = \vec{0}$ enthält

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \; \triangle_{\vec{r}} \; \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \; \triangle \; \frac{1}{r} \overset{(i)}{=} \int\limits_{\mathcal{K}} d^3r \; \triangle \; \frac{1}{r}$$

mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$: Kugel mit Mittelpunkt $\vec{r} = 0$ und Radius R

$$= \int\limits_{\mathcal{K}} d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \, \frac{1}{r} \overset{\text{Gauß}}{=} \int\limits_{\partial\mathcal{K}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \, \frac{1}{r} = -\int\limits_{\partial\mathcal{K}} d\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

(ii) $\underline{\vec{r}' \in \mathcal{V}}$ z.z.: $\int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \triangle_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi$

Koordinatenwahl: $\vec{r}' = \vec{0}$, $\mathcal{V}$: Volumen, das $\vec{r} = \vec{0}$ enthält

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \triangle_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \triangle \, \frac{1}{r} \overset{(i)}{=} \int\limits_{\mathcal{K}} d^3r \, \triangle \, \frac{1}{r}$$

mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$: Kugel mit Mittelpunkt $\vec{r} = 0$ und Radius R

$$= \int\limits_{\mathcal{K}} d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \, \frac{1}{r} \overset{\text{Gauß}}{=} \int\limits_{\partial\mathcal{K}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \, \frac{1}{r} = -\int\limits_{\partial\mathcal{K}} d\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Kugeloberfläche: $\vec{r} = R\vec{e}_r \quad \Rightarrow \quad \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{e}_r}{R^2}$

(ii) $\underline{\vec{r}' \in \mathcal{V}}$ z.z.: $\int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \; \triangle_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi$

Koordinatenwahl: $\vec{r}' = \vec{0}$, $\mathcal{V}$: Volumen, das $\vec{r} = \vec{0}$ enthält

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \; \triangle_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \; \triangle \, \frac{1}{r} \overset{(i)}{=} \int\limits_{\mathcal{K}} d^3r \; \triangle \, \frac{1}{r}$$

mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$: Kugel mit Mittelpunkt $\vec{r} = 0$ und Radius R

$$= \int\limits_{\mathcal{K}} d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \, \frac{1}{r} \overset{\text{Gauß}}{=} \int\limits_{\partial\mathcal{K}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \, \frac{1}{r} = -\int\limits_{\partial\mathcal{K}} d\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Kugeloberfläche: $\vec{r} = R\vec{e}_r \;\Rightarrow\; \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{e}_r}{R^2}$, $\quad d\vec{\sigma} = r^2 \, d\Omega \, \vec{e}_r = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{e}_r$

(ii) $\underline{\vec{r}' \in \mathcal{V}}$ z.z.: $\int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \; \triangle_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi$

Koordinatenwahl: $\vec{r}' = \vec{0}$, $\mathcal{V}$: Volumen, das $\vec{r} = \vec{0}$ enthält

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \; \triangle_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \; \triangle \, \frac{1}{r} \overset{(i)}{=} \int\limits_{\mathcal{K}} d^3r \; \triangle \, \frac{1}{r}$$

mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$: Kugel mit Mittelpunkt $\vec{r} = 0$ und Radius R

$$= \int\limits_{\mathcal{K}} d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \, \frac{1}{r} \overset{\text{Gauß}}{=} \int\limits_{\partial\mathcal{K}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \, \frac{1}{r} = -\int\limits_{\partial\mathcal{K}} d\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Kugeloberfläche: $\vec{r} = R\vec{e}_r \;\Rightarrow\; \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{e}_r}{R^2}$, $\quad d\vec{\sigma} = r^2 \, d\Omega \, \vec{e}_r = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{e}_r$

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \; \triangle \, \frac{1}{r} = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, R^2 \, \vec{e}_r \cdot \frac{\vec{e}_r}{R^2}$$

(ii) $\underline{\vec{r}' \in \mathcal{V}}$ z.z.: $\int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \triangle_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi$

Koordinatenwahl: $\vec{r}' = \vec{0}$, $\mathcal{V}$: Volumen, das $\vec{r} = \vec{0}$ enthält

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \triangle_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \triangle \, \frac{1}{r} \overset{(i)}{=} \int\limits_{\mathcal{K}} d^3r \, \triangle \, \frac{1}{r}$$

mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$: Kugel mit Mittelpunkt $\vec{r} = 0$ und Radius R

$$= \int\limits_{\mathcal{K}} d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \, \frac{1}{r} \overset{\text{Gauß}}{=} \int\limits_{\partial\mathcal{K}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \, \frac{1}{r} = - \int\limits_{\partial\mathcal{K}} d\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Kugeloberfläche: $\vec{r} = R\vec{e}_r \;\Rightarrow\; \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{e}_r}{R^2}$, $\quad d\vec{\sigma} = r^2 \, d\Omega \, \vec{e}_r = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{e}_r$

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \triangle \, \frac{1}{r} = - \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, R^2 \, \vec{e}_r \cdot \frac{\vec{e}_r}{R^2} = -4\pi \qquad \checkmark$$

$$\Rightarrow \; \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int d^3r'\, \rho(\vec{r}\,')\; \triangle_{\vec{r}}\; \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3r'\, \rho(\vec{r}\,')\, \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\triangle_{\vec{r}}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik (differenzielle Darstellung):

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\;\triangle_{\vec{r}}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik (differenzielle Darstellung):

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}}$$

- $\displaystyle\int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{V}} d^3r\;\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} d^3r\,\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\triangle_{\vec{r}}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik (differenzielle Darstellung):

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}}$$

- $$\int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{V}} d^3r\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} d^3r\,\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

  „physikalischer Gauß'scher Satz“ (Gauß'sches Gesetz):

  Der elektrische Fluss durch die Oberfläche eines Volumens $\mathcal{V}$ ist proportional zur im Volumen enthaltenen Gesamtladung.

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\triangle_{\vec{r}}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik (differenzielle Darstellung):

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}}$$

- $$\int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{V}} d^3r\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} d^3r\,\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

  „physikalischer Gauß'scher Satz“ (Gauß'sches Gesetz):

  Der elektrische Fluss durch die Oberfläche eines Volumens $\mathcal{V}$ ist proportional zur im Volumen enthaltenen Gesamtladung.

- $$\oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{S}} d\vec{\sigma}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r})) = 0$$

Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik (differenzielle Darstellung):

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}}$$

- $\int\limits_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \rho(\vec{r}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

  „physikalischer Gauß'scher Satz" (Gauß'sches Gesetz):

  Der elektrische Fluss durch die Oberfläche eines Volumens $\mathcal{V}$ ist proportional zur im Volumen enthaltenen Gesamtladung.

- $\oint\limits_{\partial\mathcal{S}} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int\limits_{\mathcal{S}} d\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r})) = 0$

  Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik (integrale Darstellung):

$$\boxed{\int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \qquad \oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0}$$

- $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = -\,\triangle\,\phi$

- $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = -\triangle\,\phi$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\triangle\,\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(\vec{r})} \qquad \text{„Poisson-Gleichung“}$$

- $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = -\triangle\,\phi$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\triangle\,\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(\vec{r})}$$ „Poisson-Gleichung“

- ladungsfreie Raumbereiche ($\rho(\vec{r}) = 0$): $\triangle\,\phi(\vec{r}) = 0$ „Laplace-Gleichung“

- $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = -\triangle\,\phi$

  $$\Rightarrow \quad \boxed{\triangle\,\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(\vec{r})}$$ „Poisson-Gleichung"

- ladungsfreie Raumbereiche ($\rho(\vec{r}) = 0$): $\triangle\,\phi(\vec{r}) = 0$ „Laplace-Gleichung"
- allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung
  = spezielle Lösung der Poisson-Gl. + allgemeine Lösung der Laplace-Gl.

- $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = -\triangle\,\phi$

  $\Rightarrow \quad \boxed{\triangle\,\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(\vec{r})}$ „Poisson-Gleichung“

- ladungsfreie Raumbereiche ($\rho(\vec{r}) = 0$): $\triangle\,\phi(\vec{r}) = 0$ „Laplace-Gleichung“

- allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung
  = spezielle Lösung der Poisson-Gl. + allgemeine Lösung der Laplace-Gl.

- spezielle Lösung (s. Abschnitt 6.2): $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad (*)$

- $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = -\triangle\,\phi$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\triangle\,\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(\vec{r})} \qquad \text{„Poisson-Gleichung“}$$

- ladungsfreie Raumbereiche ($\rho(\vec{r}) = 0$): $\triangle\,\phi(\vec{r}) = 0$ „Laplace-Gleichung“
- allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung
  = spezielle Lösung der Poisson-Gl. + allgemeine Lösung der Laplace-Gl.
- spezielle Lösung (s. Abschnitt 6.2): $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad (*)$

$$\Rightarrow \quad \triangle\,\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\left(-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(\vec{r}) \qquad \checkmark$$

- $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = -\triangle\,\phi$

  $\Rightarrow \quad \boxed{\triangle\,\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(\vec{r})}$ „Poisson-Gleichung“

- ladungsfreie Raumbereiche ($\rho(\vec{r}) = 0$): $\triangle\,\phi(\vec{r}) = 0$ „Laplace-Gleichung“

- allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung
  = spezielle Lösung der Poisson-Gl. + allgemeine Lösung der Laplace-Gl.

- spezielle Lösung (s. Abschnitt 6.2): $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad (*)$

  $\Rightarrow \quad \triangle\,\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\big(-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\big) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(\vec{r}) \qquad \checkmark$

- Poisson-Gleichung = partielle Differenzialgl.

  $\longrightarrow$ Lösungen nur eindeutig nach Festlegung von Randbedingungen

- $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = -\triangle\,\phi$

  $\Rightarrow \quad \boxed{\triangle\,\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(\vec{r})}$ „Poisson-Gleichung“

- ladungsfreie Raumbereiche ($\rho(\vec{r}) = 0$): $\triangle\,\phi(\vec{r}) = 0$ „Laplace-Gleichung“

- allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung
  = spezielle Lösung der Poisson-Gl. + allgemeine Lösung der Laplace-Gl.

- spezielle Lösung (s. Abschnitt 6.2): $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ $(*)$

  $\Rightarrow \quad \triangle\,\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\left(-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(\vec{r}) \quad \checkmark$

- Poisson-Gleichung = partielle Differenzialgl.

  ➞ Lösungen nur eindeutig nach Festlegung von Randbedingungen

  $(*)$ korrekte Lösung, wenn keine Randbedingungen im Endlichen vorliegen.

6.4 Feldverhalten an Grenzflächen

6.4 Feldverhalten an Grenzflächen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Grenzfläche zweier Medien:

  Ladungen sammeln sich oft in einer dünnen Schicht an.

  → Flächenladungsdichte: $\sigma = \frac{dQ}{dA}$ (dA = Flächenelement)

6.4 Feldverhalten an Grenzflächen

- Grenzfläche zweier Medien:

  Ladungen sammeln sich oft in einer dünnen Schicht an.

  → Flächenladungsdichte: $\sigma = \frac{dQ}{dA}$ (dA = Flächenelement)

  Wie ändert sich das $\vec{E}$-Feld an einer solchen Schicht?

6.4 Feldverhalten an Grenzflächen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

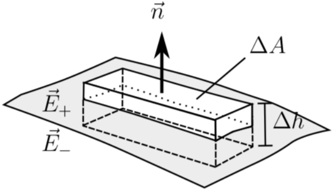
- Grenzfläche zweier Medien:

  Ladungen sammeln sich oft in einer dünnen Schicht an.

  → Flächenladungsdichte: $\sigma = \frac{dQ}{dA}$ (dA = Flächenelement)

  Wie ändert sich das $\vec{E}$-Feld an einer solchen Schicht?

- Normalkomponente:



$$\Delta V = \Delta A \, \Delta h$$

6.4 Feldverhalten an Grenzflächen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

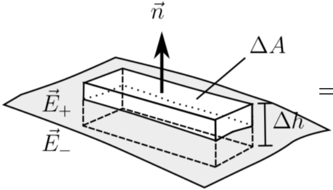
- Grenzfläche zweier Medien:

  Ladungen sammeln sich oft in einer dünnen Schicht an.

  → Flächenladungsdichte: $\sigma = \frac{dQ}{dA}$ (dA = Flächenelement)

  Wie ändert sich das $\vec{E}$-Feld an einer solchen Schicht?

- Normalkomponente:



$$\Delta V = \Delta A \, \Delta h$$

$$\Rightarrow \int_{\Delta V} d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int_{\partial \Delta V} d\vec{S} \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

6.4 Feldverhalten an Grenzflächen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

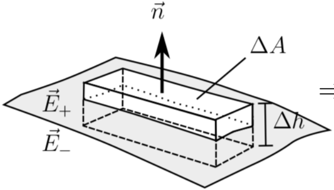
- Grenzfläche zweier Medien:

  Ladungen sammeln sich oft in einer dünnen Schicht an.

  → Flächenladungsdichte: $\sigma = \frac{dQ}{dA}$ (dA = Flächenelement)

  Wie ändert sich das $\vec{E}$-Feld an einer solchen Schicht?

- Normalkomponente:



$$\Delta V = \Delta A \, \Delta h$$

$$\Rightarrow \int_{\Delta V} d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int_{\partial \Delta V} d\vec{S} \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Delta V} d^3r \, \rho(\vec{r}) = \frac{\Delta Q}{\varepsilon_0}$$

6.4 Feldverhalten an Grenzflächen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

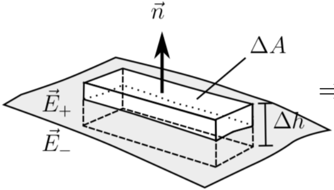
- Grenzfläche zweier Medien:

  Ladungen sammeln sich oft in einer dünnen Schicht an.

  → Flächenladungsdichte: $\sigma = \frac{dQ}{dA}$ (dA = Flächenelement)

  Wie ändert sich das $\vec{E}$-Feld an einer solchen Schicht?

- Normalkomponente:



$$\Delta V = \Delta A \, \Delta h$$

$$\Rightarrow \int_{\Delta V} d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int_{\partial \Delta V} d\vec{S} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \xrightarrow{\Delta h \to 0} \Delta A \, \vec{n} \cdot \left(\vec{E}_+ - \vec{E}_- \right)$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Delta V} d^3r \, \rho(\vec{r}) = \frac{\Delta Q}{\varepsilon_0} \xrightarrow{\Delta h \to 0} \frac{\sigma \Delta A}{\varepsilon_0}$$

6.4 Feldverhalten an Grenzflächen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

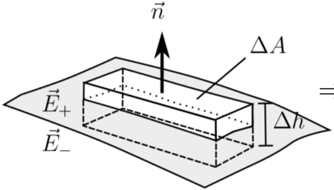
- Grenzfläche zweier Medien:

  Ladungen sammeln sich oft in einer dünnen Schicht an.

  ⟶ Flächenladungsdichte: $\sigma = \frac{dQ}{dA}$ (dA = Flächenelement)

  Wie ändert sich das $\vec{E}$-Feld an einer solchen Schicht?

- Normalkomponente:



$$\Delta V = \Delta A\, \Delta h$$

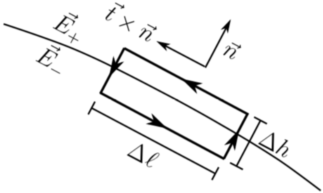
$$\Rightarrow \int_{\Delta V} d^3r\, \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \int_{\partial\Delta V} d\vec{S}\cdot\vec{E}(\vec{r}) \xrightarrow{\Delta h\to 0} \Delta A\, \vec{n}\cdot\left(\vec{E}_+ - \vec{E}_-\right)$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\Delta V} d^3r\, \rho(\vec{r}) = \frac{\Delta Q}{\varepsilon_0} \xrightarrow{\Delta h\to 0} \frac{\sigma\Delta A}{\varepsilon_0}$$

$\Rightarrow \vec{n}\cdot(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ Die Normalkomponente des $\vec{E}$-Feldes ist unstetig.

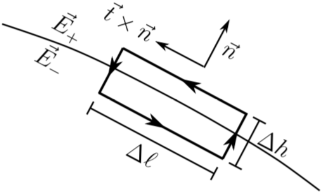
- Tangentialkomponente:



$\Delta \mathcal{F} = \Delta h \, \Delta \ell$

- $\vec{t}$: Einheitsvektor $\perp$ $\Delta \mathcal{F}$
- $\vec{n}$: Einheitsvektor $\perp$ Grenzfläche

- Tangentialkomponente:

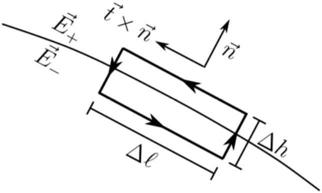


$$\Delta\mathcal{F} = \Delta h\, \Delta\ell$$

- $\vec{t}$: Einheitsvektor $\perp$ $\Delta\mathcal{F}$
- $\vec{n}$: Einheitsvektor $\perp$ Grenzfläche

$$\Rightarrow\ 0 = \int_{\Delta\mathcal{F}} d\vec{S} \cdot \underbrace{\left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right)}_{=\vec{0}} \overset{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial\Delta\mathcal{F}} d\vec{r} \cdot \vec{E}$$

- Tangentialkomponente:



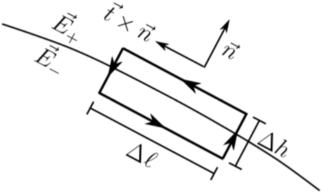
$$\Delta\mathcal{F} = \Delta h\,\Delta\ell$$

- $\vec{t}$: Einheitsvektor $\perp$ $\Delta\mathcal{F}$
- $\vec{n}$: Einheitsvektor $\perp$ Grenzfläche

$$\Rightarrow\; 0 = \int_{\Delta\mathcal{F}} d\vec{S} \cdot \underbrace{\left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right)}_{=\vec{0}} \overset{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial\Delta\mathcal{F}} d\vec{r} \cdot \vec{E}$$

$$\xrightarrow{\Delta h \to 0} \Delta\ell\; \left(\vec{t} \times \vec{n}\right) \cdot \left(\vec{E}_+ - \vec{E}_-\right)$$

- Tangentialkomponente:



$$\Delta\mathcal{F} = \Delta h\,\Delta\ell$$

- $\vec{t}$: Einheitsvektor $\perp \Delta\mathcal{F}$
- $\vec{n}$: Einheitsvektor $\perp$ Grenzfläche

$$\Rightarrow\; 0 = \int_{\Delta\mathcal{F}} d\vec{S}\cdot\underbrace{\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)}_{=\vec{0}} \overset{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial\Delta\mathcal{F}} d\vec{r}\cdot\vec{E}$$

$$\xrightarrow{\Delta h\to 0}\; \Delta\ell\,\left(\vec{t}\times\vec{n}\right)\cdot\left(\vec{E}_+ - \vec{E}_-\right)$$

$$\Rightarrow\; \left(\vec{t}\times\vec{n}\right)\cdot\left(\vec{E}_+ - \vec{E}_-\right) = 0$$

Die Tangentialkomponente des $\vec{E}$-Feldes ist an der Grenzfläche stetig.

6.5 Elektrostatische Feldenergie

6.5 Elektrostatische Feldenergie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kraft auf eine Punktladung im $\vec{E}$-Feld: $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) = -q\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$

6.5 Elektrostatische Feldenergie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kraft auf eine Punktladung im $\vec{E}$-Feld: $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) = -q\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$
- Arbeit, die man leisten muss, um q von $\vec{r}_0$ nach $\vec{r}$ zu verschieben:

$$\Delta W = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,') = q\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{r}\,') = q\left(\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)\right) \equiv qU(\vec{r}, \vec{r}_0)$$

6.5 Elektrostatische Feldenergie

- Kraft auf eine Punktladung im $\vec{E}$-Feld: $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) = -q\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$
- Arbeit, die man leisten muss, um q von $\vec{r}_0$ nach $\vec{r}$ zu verschieben:

$$\Delta W = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,') = q\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{r}\,') = q\left(\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)\right) \equiv qU(\vec{r}, \vec{r}_0)$$

- Setze $\phi(r \to \infty) = 0$

  $\rightarrow$ Energie einer Ladungsverteilung
  = Arbeit, die geleistet werden muss, alle Ladungen aus dem Unendlichen an die jeweiligen Orte zu verschieben.

6.5 Elektrostatische Feldenergie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kraft auf eine Punktladung im $\vec{E}$-Feld: $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) = -q\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$
- Arbeit, die man leisten muss, um q von $\vec{r}_0$ nach $\vec{r}$ zu verschieben:

$$\Delta W = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,') = q\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{r}\,') = q\left(\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)\right) \equiv qU(\vec{r},\vec{r}_0)$$

- Setze $\phi(r \to \infty) = 0$

  $\rightarrow$ Energie einer Ladungsverteilung
  = Arbeit, die geleistet werden muss, alle Ladungen aus dem Unendlichen an die jeweiligen Orte zu verschieben.

  - 1. Punktladung: $W^{(1)} = 0$

6.5 Elektrostatische Feldenergie

- Kraft auf eine Punktladung im $\vec{E}$-Feld: $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) = -q\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$
- Arbeit, die man leisten muss, um q von $\vec{r}_0$ nach $\vec{r}$ zu verschieben:

$$\Delta W = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,') = q\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{r}\,') = q\left(\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)\right) \equiv qU(\vec{r}, \vec{r}_0)$$

- Setze $\phi(r \to \infty) = 0$

  → Energie einer Ladungsverteilung
  = Arbeit, die geleistet werden muss, alle Ladungen aus dem Unendlichen an die jeweiligen Orte zu verschieben.

  - 1. Punktladung: $W^{(1)} = 0$
  - $i-1$ Ladungen an $\vec{r}^{\,(1)}, \dots, \vec{r}^{\,(i-1)}$ $\quad\Rightarrow\quad \phi^{(<i)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{q_j}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}|}$

6.5 Elektrostatische Feldenergie

- Kraft auf eine Punktladung im $\vec{E}$-Feld: $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) = -q\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$
- Arbeit, die man leisten muss, um q von $\vec{r}_0$ nach $\vec{r}$ zu verschieben:

$$\Delta W = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,') = q\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{r}\,') = q\left(\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)\right) \equiv qU(\vec{r}, \vec{r}_0)$$

- Setze $\phi(r \to \infty) = 0$

  $\rightarrow$ Energie einer Ladungsverteilung
  = Arbeit, die geleistet werden muss, alle Ladungen aus dem Unendlichen an die jeweiligen Orte zu verschieben.

  - 1. Punktladung: $W^{(1)} = 0$
  - $i-1$ Ladungen an $\vec{r}^{\,(1)}, \dots, \vec{r}^{\,(i-1)}$ $\Rightarrow$ $\phi^{(<i)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{q_j}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}|}$

    i-te Ladung nach $\vec{r}^{\,(i)}$: $W^{(i)} = q_i\,\phi^{(<i)}(\vec{r}^{\,(i)})$

⇒ Energie von N statischen Punktladungen:

$$W = \sum_{i=1}^{N} W^{(i)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}|} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}|}$$

$\Rightarrow$ Energie von N statischen Punktladungen:

$$W = \sum_{i=1}^{N} W^{(i)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}|} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}|}$$

- kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$\Rightarrow$ Energie von N statischen Punktladungen:

$$W = \sum_{i=1}^{N} W^{(i)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}|} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}|}$$

- kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \qquad \text{(enthält aber auch } \vec{r} = \vec{r}\,'\text{!)}$$

⇒ Energie von N statischen Punktladungen:

$$W = \sum_{i=1}^{N} W^{(i)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}|} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}|}$$

- kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \qquad \text{(enthält aber auch } \vec{r} = \vec{r}\,' \text{!)}$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3r \, \rho(\vec{r})\phi(\vec{r})$$