- $\{\tilde{q}^{(j)}\}$ = orthogonale Basis für q $\quad\rightarrow\quad q(t) = \sum_{j=1}^{s} \eta_j(t)\, \tilde{q}^{(j)}$
  - $\eta_j(t)$: „Normalkoordinaten“

- $\{\tilde{q}^{(j)}\}$ = orthogonale Basis für q $\quad\longrightarrow\quad q(t) = \sum_{j=1}^{s} \eta_j(t)\, \tilde{q}^{(j)}$
  - $\eta_j(t)$: „Normalkoordinaten“
- Lagrangefunktion:

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}^T \underline{\underline{M}}\, \dot{q} - q^T \underline{\underline{K}}\, q\right)$$

- $\{\tilde{q}^{(j)}\}$ = orthogonale Basis für q $\quad\rightarrow\quad q(t) = \sum_{j=1}^{s} \eta_j(t)\, \tilde{q}^{(j)}$
  - $\eta_j(t)$: „Normalkoordinaten“
- Lagrangefunktion:

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}^T \underline{\underline{M}}\, \dot{q} \;-\; q^T \underline{\underline{K}}\, q\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} \dot{\eta}_i(t)\dot{\eta}_j(t)\, \underbrace{\tilde{q}^{(i)\,T}\, \underline{\underline{M}}\, \tilde{q}^{(j)}}_{\delta_{ij}} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} \eta_i(t)\eta_j(t) \underbrace{\tilde{q}^{(i)\,T}\, \underline{\underline{K}}\, \tilde{q}^{(j)}}_{\omega_j^2\; \tilde{q}^{(i)\,T}\underline{\underline{M}}\; \tilde{q}^{(j)} \;=\; \omega_j^2\; \delta_{ij}}$$

- $\{\tilde{q}^{(j)}\}$ = orthogonale Basis für q $\quad\rightarrow\quad$ $q(t) = \sum_{j=1}^{s} \eta_j(t)\, \tilde{q}^{(j)}$
  - $\eta_j(t)$: „Normalkoordinaten"
- Lagrangefunktion:

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}^T \underline{\underline{M}}\, \dot{q} - q^T \underline{\underline{K}}\, q\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} \dot{\eta}_i(t)\dot{\eta}_j(t)\, \underbrace{\tilde{q}^{(i)\,T}\, \underline{\underline{M}}\, \tilde{q}^{(j)}}_{\delta_{ij}} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} \eta_i(t)\eta_j(t) \underbrace{\tilde{q}^{(i)\,T}\, \underline{\underline{K}}\, \tilde{q}^{(j)}}_{\omega_j^2\, \tilde{q}^{(i)\,T} \underline{\underline{M}}\, \tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2\, \delta_{ij}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\left(\dot{\eta}_j^2(t) - \omega_j^2 \eta_j^2(t)\right)$$

- $\{\tilde{q}^{(j)}\}$ = orthogonale Basis für q $\quad\rightarrow\quad q(t) = \sum_{j=1}^{s} \eta_j(t)\, \tilde{q}^{(j)}$
  - $\eta_j(t)$: „Normalkoordinaten“
- Lagrangefunktion:

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}^T \underline{\underline{M}}\, \dot{q} \;-\; q^T \underline{\underline{K}}\, q\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} \dot{\eta}_i(t)\dot{\eta}_j(t)\, \underbrace{\tilde{q}^{(i)\,T}\, \underline{\underline{M}}\; \tilde{q}^{(j)}}_{\delta_{ij}} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} \eta_i(t)\eta_j(t) \underbrace{\tilde{q}^{(i)\,T}\, \underline{\underline{K}}\; \tilde{q}^{(j)}}_{\omega_j^2\; \tilde{q}^{(i)\,T}\, \underline{\underline{M}}\; \tilde{q}^{(j)} \,=\, \omega_j^2\, \delta_{ij}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\left(\dot{\eta}_j^2(t) - \omega_j^2 \eta_j^2(t)\right)$$

s vollständig entkoppelte harmon. Oszillatoren!

- $\{\tilde{q}^{(j)}\}$ = orthogonale Basis für q $\quad\rightarrow\quad q(t) = \sum_{j=1}^{s} \eta_j(t)\, \tilde{q}^{(j)}$
  - $\eta_j(t)$: „Normalkoordinaten“
- Lagrangefunktion:

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}^T \underline{\underline{M}}\, \dot{q} \;-\; q^T \underline{\underline{K}}\, q\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} \dot{\eta}_i(t)\dot{\eta}_j(t)\, \underbrace{\tilde{q}^{(i)\,T}\, \underline{\underline{M}}\, \tilde{q}^{(j)}}_{\delta_{ij}} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} \eta_i(t)\eta_j(t) \underbrace{\tilde{q}^{(i)\,T}\, \underline{\underline{K}}\, \tilde{q}^{(j)}}_{\omega_j^2\; \tilde{q}^{(i)\,T} \underline{\underline{M}}\; \tilde{q}^{(j)} \;=\; \omega_j^2\; \delta_{ij}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\left(\dot{\eta}_j^2(t) - \omega_j^2 \eta_j^2(t)\right)$$ s vollständig entkoppelte harmon. Oszillatoren!

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichungen: $\ddot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j = 0\,, \quad j = 1, \dots, s$

- $\{\tilde{q}^{(j)}\}$ = orthogonale Basis für q $\quad\rightarrow\quad q(t) = \sum_{j=1}^{s} \eta_j(t)\,\tilde{q}^{(j)}$
  - $\eta_j(t)$: „Normalkoordinaten"
- Lagrangefunktion:

$$
\begin{aligned}
L &= \tfrac{1}{2}\left(\dot{q}^T \underline{\underline{M}}\,\dot{q} \;-\; q^T \underline{\underline{K}}\,q\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} \dot{\eta}_i(t)\dot{\eta}_j(t)\,\underbrace{\tilde{q}^{(i)\,T}\,\underline{\underline{M}}\,\tilde{q}^{(j)}}_{\delta_{ij}} - \tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} \eta_i(t)\eta_j(t)\underbrace{\tilde{q}^{(i)\,T}\,\underline{\underline{K}}\,\tilde{q}^{(j)}}_{\omega_j^2\;\tilde{q}^{(i)\,T}\underline{\underline{M}}\;\tilde{q}^{(j)}\;=\;\omega_j^2\;\delta_{ij}}\\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\left(\dot{\eta}_j^2(t) - \omega_j^2\eta_j^2(t)\right)
\end{aligned}
$$

s vollständig entkoppelte harmon. Oszillatoren!

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichungen: $\ddot{\eta}_j + \omega_j^2\eta_j = 0\,,\quad j = 1,\ldots,s$

$\Rightarrow$ Lösungen: $\eta_j(t) = A_j\,\cos(\omega_j t + \varphi_j);\quad A_j,\,\varphi_j = const.\quad$ ($2s$ Anfangsbed.)

Teil II: Klassische Elektrodynamik

Teil II: Klassische Elektrodynamik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6. Elektrostatik
7. Magnetostatik
8. Elektro- und Magnetostatik in Materie
9. Elektrodynamik zeitlich veränderlicher Felder

6. Elektrostatik

6.1 Grundlagen: Ladungen und das Coulomb-Gesetz

6.1 Grundlagen: Ladungen und das Coulomb-Gesetz

- Grundgrößen der Mechanik: Länge, Zeit, Masse

  zusätzlich in der Elektrostatik: Ladung

6.1 Grundlagen: Ladungen und das Coulomb-Gesetz

- Grundgrößen der Mechanik: Länge, Zeit, Masse

  zusätzlich in der Elektrostatik: Ladung
- analog zu den Punktmassen: Punktladungen q

6.1 Grundlagen: Ladungen und das Coulomb-Gesetz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Grundgrößen der Mechanik: Länge, Zeit, Masse
  zusätzlich in der Elektrostatik: Ladung
- analog zu den Punktmassen: Punktladungen q
- Elementarteilchen:
  - Elektron: $q_{e^-} = -e$, Positron: $q_{e^+} = +e$
  - Up-Quark: $q_u = \frac{2}{3}e$
  - Down-Quark: $q_d = -\frac{1}{3}e$
  - ...

  Elementarladung: $e = 1,602176634 \cdot 10^{-19}\mathrm{C}$

6.1 Grundlagen: Ladungen und das Coulomb-Gesetz

- Grundgrößen der Mechanik: Länge, Zeit, Masse
  zusätzlich in der Elektrostatik: Ladung
- analog zu den Punktmassen: Punktladungen q
- Elementarteilchen:
  - Elektron: $q_{e^-} = -e$, Positron: $q_{e^+} = +e$
  - Up-Quark: $q_u = \frac{2}{3}e$
  - Down-Quark: $q_d = -\frac{1}{3}e$
  - ...

  Elementarladung: $e = 1,602176634 \cdot 10^{-19}\mathrm{C}$
- makroskopische Körper:
  kontinuierliche Ladungsverteilung $\rightarrow$ Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$

- Gesamtladung: $Q = \sum_i q_i = \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \rho(\vec{r})$

- Gesamtladung: $Q = \sum_i q_i = \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \rho(\vec{r})$
- Punktladung q_i am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$: $\rho_i(\vec{r}) = q_i\, \delta(\vec{r} - \vec{r}^{\,(i)})$

- Gesamtladung: $Q = \sum_i q_i = \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \rho(\vec{r})$
- Punktladung q_i am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$: $\rho_i(\vec{r}) = q_i\, \delta(\vec{r} - \vec{r}^{\,(i)})$
- δ-„Funktion“ (δ-Distribution):
  - $\int_a^b dx\, f(x)\, \delta(x - x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{falls } x_0 \in (a, b) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - $\int_{\mathcal{V}} d^3r\, f(\vec{r})\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{cases} f(\vec{r}_0) & \text{falls } \vec{r}_0 \in \mathcal{V} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

- Gesamtladung: $Q = \sum_i q_i = \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \rho(\vec{r})$
- Punktladung q_i am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$: $\rho_i(\vec{r}) = q_i\, \delta(\vec{r} - \vec{r}^{\,(i)})$
- δ-„Funktion“ (δ-Distribution):
  - $\int_a^b dx\, f(x)\, \delta(x - x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{falls } x_0 \in (a, b) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - $\int_{\mathcal{V}} d^3r\, f(\vec{r})\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{cases} f(\vec{r}_0) & \text{falls } \vec{r}_0 \in \mathcal{V} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- mehrere Punktladungen: $\rho(\vec{r}) = \sum_i \rho_i(\vec{r}) = \sum_i q_i\, \delta(\vec{r} - \vec{r}^{\,(i)})$

$$\Rightarrow \quad Q = \int_{\mathcal{V}} d^3r \sum_i q_i\, \delta(\vec{r} - \vec{r}^{\,(i)}) = \sum_i q_i \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \delta(\vec{r} - \vec{r}^{\,(i)}) = \sum_{\substack{i \\ \vec{r}^{\,(i)} \in \mathcal{V}}} q_i \quad \checkmark$$

- Gesamtladung: $Q = \sum_i q_i = \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \rho(\vec{r})$
- Punktladung q_i am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$: $\rho_i(\vec{r}) = q_i\, \delta(\vec{r} - \vec{r}^{\,(i)})$
- δ-„Funktion“ (δ-Distribution):
  - $\int_a^b dx\, f(x)\, \delta(x - x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{falls } x_0 \in (a, b) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - $\int_{\mathcal{V}} d^3r\, f(\vec{r})\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{cases} f(\vec{r}_0) & \text{falls } \vec{r}_0 \in \mathcal{V} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- mehrere Punktladungen: $\rho(\vec{r}) = \sum_i \rho_i(\vec{r}) = \sum_i q_i\, \delta(\vec{r} - \vec{r}^{\,(i)})$

$$\Rightarrow \quad Q = \int_{\mathcal{V}} d^3r \sum_i q_i\, \delta(\vec{r} - \vec{r}^{\,(i)}) = \sum_i q_i \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \delta(\vec{r} - \vec{r}^{\,(i)}) = \sum_{\substack{i \\ \vec{r}^{\,(i)} \in \mathcal{V}}} q_i \quad \checkmark$$

- Gesamtladung Q = Erhaltungsgröße

  aber: Positive und negative Ladungen können sich gegenseitig aufheben.

Coulomb-Gesetz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Kraft einer ruhenden Punktladung q_j auf eine ruhende Punktladung q_i:

$$\vec{F}^{\,(ij)} = k\,\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}^2}\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \qquad \vec{r}_{ij} = \vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)}, \quad k = const.$$

Coulomb-Gesetz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Kraft einer ruhenden Punktladung q_j auf eine ruhende Punktladung q_i:

$$\vec{F}^{\,(ij)} = k\,\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}^2}\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \qquad \vec{r}_{ij} = \vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)}, \qquad k = const.$$

- fällt quadratisch mit dem Abstand ab: $\left|\vec{F}^{\,(ij)}\right| \propto \frac{1}{r_{ij}^2}$

Coulomb-Gesetz

Kraft einer ruhenden Punktladung q_j auf eine ruhende Punktladung q_i:

$$\vec{F}^{\,(ij)} = k\,\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}^2}\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \qquad \vec{r}_{ij} = \vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)}, \quad k = const.$$

- fällt quadratisch mit dem Abstand ab: $\left|\vec{F}^{\,(ij)}\right| \propto \frac{1}{r_{ij}^2}$
- Richtung entlang der Verbindungslinie
  - gleiche Vorzeichen ($q_i q_j > 0$): abstoßende Kraft
  - ungleiche Vorzeichen ($q_i q_j < 0$): anziehende Kraft

$\Rightarrow \quad k > 0$

Coulomb-Gesetz

Kraft einer ruhenden Punktladung q_j auf eine ruhende Punktladung q_i:

$$\vec{F}^{\,(ij)} = k\,\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}^2}\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \qquad \vec{r}_{ij} = \vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)}, \quad k = const.$$

- fällt quadratisch mit dem Abstand ab: $\left|\vec{F}^{\,(ij)}\right| \propto \frac{1}{r_{ij}^2}$
- Richtung entlang der Verbindungslinie
  - gleiche Vorzeichen ($q_i q_j > 0$): abstoßende Kraft
  - ungleiche Vorzeichen ($q_i q_j < 0$): anziehende Kraft

$\Rightarrow \quad k > 0$

- $\vec{F}^{\,(ij)} = -\vec{F}^{\,(ji)}$ („*actio* = *reactio*“)

Coulomb-Gesetz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Kraft einer ruhenden Punktladung q_j auf eine ruhende Punktladung q_i:

$$\vec{F}^{(ij)} = k \, \frac{q_i \, q_j}{r_{ij}^2} \, \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \qquad \vec{r}_{ij} = \vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)}, \quad k = const.$$

- fällt quadratisch mit dem Abstand ab: $\left|\vec{F}^{(ij)}\right| \propto \frac{1}{r_{ij}^2}$
- Richtung entlang der Verbindungslinie
  - gleiche Vorzeichen ($q_i q_j > 0$): abstoßende Kraft
  - ungleiche Vorzeichen ($q_i q_j < 0$): anziehende Kraft

$\Rightarrow \quad k > 0$

- $\vec{F}^{(ij)} = -\vec{F}^{(ji)}$ („*actio = reactio*“)
- Wie groß ist k?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Variante

- Setze $k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\vec{F}^{\,(ij)}\right| = \frac{q_i\, q_j}{r_{ij}^2}$ und definiere so die Einheit der Ladung

1. Variante

- Setze $k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\vec{F}^{\,(ij)}\right| = \frac{q_i\, q_j}{r_{ij}^2}$ und definiere so die Einheit der Ladung

  $\Rightarrow \quad [q^2] = [F\, r^2] = 1\,\mathrm{N\,m^2} = 1\,\mathrm{kg\,m^3\,s^{-2}} \quad \Rightarrow \quad [q] = 1\,\mathrm{kg^{1/2}\,m^{3/2}\,s^{-1}}$

1. Variante

- Setze $k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\vec{F}^{\,(ij)}\right| = \frac{q_i\, q_j}{r_{ij}^2}$ und definiere so die Einheit der Ladung

  $\Rightarrow \quad [q^2] = [F\, r^2] = 1\,\mathrm{N\,m^2} = 1\,\mathrm{kg\,m^3\,s^{-2}} \quad \Rightarrow \quad [q] = 1\,\mathrm{kg^{1/2}\,m^{3/2}\,s^{-1}}$

→ Zwei Ladungen $q = 1\,\mathrm{kg^{1/2}\,m^{3/2}\,s^{-1}}$ üben im Abstand 1 m auf einander die Kraft 1 N aus.

1. Variante

- Setze $k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{F}^{\,(ij)}| = \frac{q_i\, q_j}{r_{ij}^2}$ und definiere so die Einheit der Ladung

  $\Rightarrow \quad [q^2] = [F\, r^2] = 1\,\mathrm{N\,m}^2 = 1\,\mathrm{kg\,m}^3\,\mathrm{s}^{-2} \quad \Rightarrow \quad [q] = 1\,\mathrm{kg}^{1/2}\,\mathrm{m}^{3/2}\,\mathrm{s}^{-1}$

→ Zwei Ladungen $q = 1\,\mathrm{kg}^{1/2}\,\mathrm{m}^{3/2}\,\mathrm{s}^{-1}$ üben im Abstand 1 m auf einander die Kraft 1 N aus.

- Gauß'sches Einheitensystem: analog mit g und cm

  (beliebt in der Theoretischen Physik)

2. Variante: SI-Einheiten (werden in dieser Vorlesung verwendet)

2. Variante: SI-Einheiten (werden in dieser Vorlesung verwendet)

- Definiere zunächst die Ladung und bestimme k durch Messung der Kraft

2. Variante: SI-Einheiten (werden in dieser Vorlesung verwendet)

- Definiere zunächst die Ladung und bestimme k durch Messung der Kraft
- $[q] = 1\,\mathrm{C}$ (Coulomb)

2. Variante: SI-Einheiten (werden in dieser Vorlesung verwendet)

- Definiere zunächst die Ladung und bestimme k durch Messung der Kraft
- $[q] = 1\,\mathrm{C}$ (Coulomb)
- seit 20. Mai 2019: über die Elementarladung

$$e = 1{,}602176634 \cdot 10^{-19}\mathrm{C} \quad \text{(exakt festgelegt)}$$

2. Variante: SI-Einheiten (werden in dieser Vorlesung verwendet)

- Definiere zunächst die Ladung und bestimme k durch Messung der Kraft
- $[q] = 1\,\mathrm{C}$ (Coulomb)
- seit 20. Mai 2019: über die Elementarladung

  $e = 1,602176634 \cdot 10^{-19}\mathrm{C}$ (exakt festgelegt)
- davor: indirekt über die Stromstärke
  - $1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$
  - 1 A (Ampere) = Stromstärke, bei der zwei parallel im Abstand 1 m angeordnete geradlinige, unendlich lange, unendlich dünne Leiter im Vakuum auf einander pro Meter Leiterlänge die magnetische Kraft $2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}$ ausüben.

- Messung der Coulomb-Kraft: $k = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}$

mit $\varepsilon_0 = 8,854\ldots \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$ (elektr. Feldkonstante, Influenzkonstante)

- Messung der Coulomb-Kraft: $k = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}$

mit $\varepsilon_0 = 8,854\,... \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$ (elektr. Feldkonstante, Influenzkonstante)

$\Rightarrow$ Coulomb-Gesetz: $$\boxed{\vec{F}^{\,(ij)} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}^2}\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}}$$

- Messung der Coulomb-Kraft: $k = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}$

  mit $\varepsilon_0 = 8,854\ldots \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$ (elektr. Feldkonstante, Influenzkonstante)

  $\Rightarrow$ Coulomb-Gesetz: $$\boxed{\vec{F}^{\,(ij)} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}^2}\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}}$$

- Vergleich mit Gravitationsgesetz: $-Gm_1\,m_2 \leftrightarrow \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,q_1\,q_2$

- Messung der Coulomb-Kraft: $k = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}$

  mit $\varepsilon_0 = 8,854 \ldots \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$ (elektr. Feldkonstante, Influenzkonstante)

  $\Rightarrow$ Coulomb-Gesetz: $\boxed{\vec{F}^{\,(ij)} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}^2}\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}}$

- Vergleich mit Gravitationsgesetz: $-Gm_1\,m_2 \leftrightarrow \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,q_1\,q_2$
  - Unterschiede:
    - positive und negative Ladungen
    - gilt nur für ruhende Ladungen!

- Messung der Coulomb-Kraft: $k = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}$

  mit $\varepsilon_0 = 8,854\ldots \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$ (elektr. Feldkonstante, Influenzkonstante)

  $\Rightarrow$ Coulomb-Gesetz: $\boxed{\vec{F}^{\,(ij)} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}^2}\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}}$

- Vergleich mit Gravitationsgesetz: $-Gm_1\,m_2 \leftrightarrow \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}q_1\,q_2$
  - Unterschiede:
    - positive und negative Ladungen
    - gilt nur für ruhende Ladungen!
  - weitere Gemeinsamkeit: Superpositionsprinzip

  ➞ mehrere Ladungen: $\vec{F}^{\,(i)} = \sum_{j\neq i}\vec{F}^{\,(ij)} = \frac{q_i}{4\pi\,\varepsilon_0}\sum_{j\neq i}\frac{q_j}{r_{ij}^2}\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$

6.2 Das elektrische Feld

6.2 Das elektrische Feld

- Coulomb-Gesetz: $\vec{F}^{\,(i)} = \frac{q_i}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$

6.2 Das elektrische Feld

- Coulomb-Gesetz: $\vec{F}^{\,(i)} = \frac{q_i}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \equiv q_i\,\vec{E}^{\,(\hat\imath)}(\vec{r}^{\,(i)})$

mit $\quad \vec{E}^{\,(\hat\imath)}(\vec{r}^{\,(i)}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$

= von allen anderen Ladungen am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$ erzeugtes elektrisches Feld

6.2 Das elektrische Feld

- Coulomb-Gesetz: $\vec{F}^{\,(i)} = \frac{q_i}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \equiv q_i \, \vec{E}^{\,(\hat{i})}(\vec{r}^{\,(i)})$

  mit $\vec{E}^{\,(\hat{i})}(\vec{r}^{\,(i)}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$

  = von allen anderen Ladungen am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$ erzeugtes elektrisches Feld

- Interpretation:

  Die Ladungen q_j erzeugen im gesamten Raum unabhängig von q_i ein Feld, auf das die Ladung q_i am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$ lokal reagiert.

6.2 Das elektrische Feld

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Coulomb-Gesetz: $\vec{F}^{\,(i)} = \frac{q_i}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \equiv q_i\, \vec{E}^{\,(\hat{i})}(\vec{r}^{\,(i)})$

  mit $\quad \vec{E}^{\,(\hat{i})}(\vec{r}^{\,(i)}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$

  = von allen anderen Ladungen am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$ erzeugtes elektrisches Feld

- Interpretation:

  Die Ladungen q_j erzeugen im gesamten Raum unabhängig von q_i ein Feld, auf das die Ladung q_i am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$ lokal reagiert.

- von q_j erzeugtes elektrisches Feld: $\vec{E}_j(\vec{r}) = \frac{q_j}{4\pi\,\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}^{\,(j)}}{|\vec{r} - \vec{r}^{\,(j)}|^3}$

6.2 Das elektrische Feld

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Coulomb-Gesetz: $\vec{F}^{\,(i)} = \frac{q_i}{4\pi\,\varepsilon_0}\sum_{j\neq i}\frac{q_j}{r_{ij}^2}\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \equiv q_i\,\vec{E}^{\,(\hat{i})}(\vec{r}^{\,(i)})$

  mit $\vec{E}^{\,(\hat{i})}(\vec{r}^{\,(i)}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\sum_{j\neq i}\frac{q_j}{r_{ij}^2}\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$

  = von allen anderen Ladungen am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$ erzeugtes elektrisches Feld

- Interpretation:

  Die Ladungen q_j erzeugen im gesamten Raum unabhängig von q_i ein Feld, auf das die Ladung q_i am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$ lokal reagiert.

- von q_j erzeugtes elektrisches Feld: $\vec{E}_j(\vec{r}) = \frac{q_j}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}|^3}$

  $\Rightarrow$ Gesamtfeld: $\vec{E}(\vec{r}) = \sum_j \vec{E}_j(\vec{r})$ (einschließlich q_i)

6.2 Das elektrische Feld

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Coulomb-Gesetz: $\vec{F}^{\,(i)} = \frac{q_i}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \equiv q_i\,\vec{E}^{\,(\hat{i})}(\vec{r}^{\,(i)})$

  mit $\vec{E}^{\,(\hat{i})}(\vec{r}^{\,(i)}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$

  = von allen anderen Ladungen am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$ erzeugtes elektrisches Feld

- Interpretation:

  Die Ladungen q_j erzeugen im gesamten Raum unabhängig von q_i ein Feld, auf das die Ladung q_i am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$ lokal reagiert.

- von q_j erzeugtes elektrisches Feld: $\vec{E}_j(\vec{r}) = \frac{q_j}{4\pi\,\varepsilon_0} \frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}|^3}$

  $\Rightarrow$ Gesamtfeld: $\vec{E}(\vec{r}) = \sum_j \vec{E}_j(\vec{r})$ (einschließlich q_i)

- mathematisch sauberer: infinitesimale „Testladung“ $q > 0$ $\rightarrow$ $\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}$

6.2 Das elektrische Feld

- Coulomb-Gesetz: $\vec{F}^{\,(i)} = \frac{q_i}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j\neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \equiv q_i\, \vec{E}^{\,(\hat{i})}(\vec{r}^{\,(i)})$

  mit $\vec{E}^{\,(\hat{i})}(\vec{r}^{\,(i)}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j\neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$

  = von allen anderen Ladungen am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$ erzeugtes elektrisches Feld

- Interpretation:

  Die Ladungen q_j erzeugen im gesamten Raum unabhängig von q_i ein Feld, auf das die Ladung q_i am Ort $\vec{r}^{\,(i)}$ lokal reagiert.

- von q_j erzeugtes elektrisches Feld: $\vec{E}_j(\vec{r}) = \frac{q_j}{4\pi\,\varepsilon_0} \frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}|^3}$

  $\Rightarrow$ Gesamtfeld: $\vec{E}(\vec{r}) = \sum_j \vec{E}_j(\vec{r})$ (einschließlich q_i)

- mathematisch sauberer: infinitesimale „Testladung“ $q > 0$ $\longrightarrow$ $\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q\to 0} \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}$

- Dimension: $[\vec{E}] = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$

6.2 Das elektrische Feld

- Coulomb-Gesetz: $\vec{F}^{(i)} = \frac{q_i}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \equiv q_i\,\vec{E}^{(\hat{i})}(\vec{r}^{(i)})$

  mit $\vec{E}^{(\hat{i})}(\vec{r}^{(i)}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$

  = von allen anderen Ladungen am Ort $\vec{r}^{(i)}$ erzeugtes elektrisches Feld

- Interpretation:

  Die Ladungen q_j erzeugen im gesamten Raum unabhängig von q_i ein Feld, auf das die Ladung q_i am Ort $\vec{r}^{(i)}$ lokal reagiert.

- von q_j erzeugtes elektrisches Feld: $\vec{E}_j(\vec{r}) = \frac{q_j}{4\pi\,\varepsilon_0} \frac{\vec{r}-\vec{r}^{(j)}}{|\vec{r}-\vec{r}^{(j)}|^3}$

  $\Rightarrow$ Gesamtfeld: $\vec{E}(\vec{r}) = \sum_j \vec{E}_j(\vec{r})$ (einschließlich q_i)

- mathematisch sauberer: infinitesimale „Testladung“ $q > 0$ $\rightarrow$ $\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}$

- Dimension: $[\vec{E}] = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = 1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$, $1\ \mathrm{V} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{C}}$ (Volt)

Feldlinien

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\vec{E}(\vec{r})$ = Vektorfeld: Jedem Raumpunkt wird ein Vektor zugeordnet

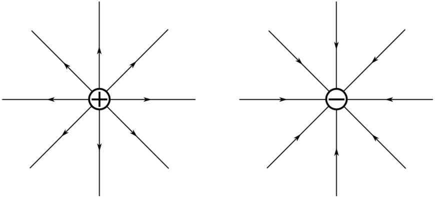
Feldlinien

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\vec{E}(\vec{r})$ = Vektorfeld: Jedem Raumpunkt wird ein Vektor zugeordnet
- Veranschaulichung: Feldlinien tangential zur Richtung von $\vec{E}(\vec{r})$

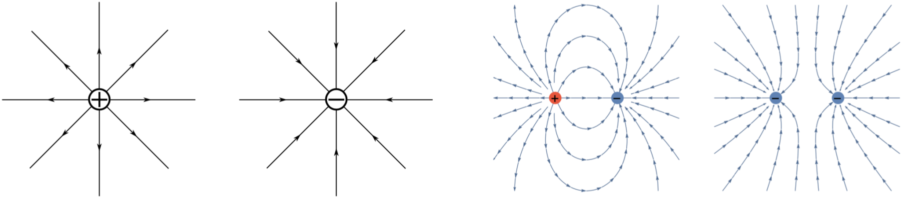
Feldlinien

- $\vec{E}(\vec{r})$ = Vektorfeld: Jedem Raumpunkt wird ein Vektor zugeordnet
- Veranschaulichung: Feldlinien tangential zur Richtung von $\vec{E}(\vec{r})$
- Beispiele:



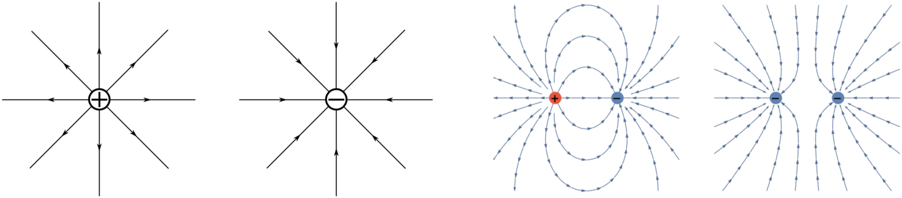
Feldlinien

- $\vec{E}(\vec{r})$ = Vektorfeld: Jedem Raumpunkt wird ein Vektor zugeordnet
- Veranschaulichung: Feldlinien tangential zur Richtung von $\vec{E}(\vec{r})$
- Beispiele:



Feldlinien

- $\vec{E}(\vec{r})$ = Vektorfeld: Jedem Raumpunkt wird ein Vektor zugeordnet
- Veranschaulichung: Feldlinien tangential zur Richtung von $\vec{E}(\vec{r})$
- Beispiele:



- Feld eindeutig (außer bei den Ladungen) $\Rightarrow$ Feldlinien schneiden sich nicht.

- N Punktladungen: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} q_j \, \frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}|^3}$

- N Punktladungen: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} q_j \, \frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}|^3}$

  → kontinuierliche Ladungsverteilung: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int d^3r' \, \rho(\vec{r}\,') \, \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$

- N Punktladungen: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} q_j \, \frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}|^3}$

  → kontinuierliche Ladungsverteilung: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int d^3r' \, \rho(\vec{r}\,') \, \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$

- Es gilt: $\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ (zumindest für $\vec{r} \neq \vec{r}'$)

- N Punktladungen: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} q_j \, \frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}|^3}$

  → kontinuierliche Ladungsverteilung: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int d^3r' \, \rho(\vec{r}\,') \, \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$

- Es gilt: $\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ (zumindest für $\vec{r} \neq \vec{r}'$)

  → $\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})}$

  mit $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int d^3r' \, \rho(\vec{r}\,') \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ „elektrostatisches Potenzial“

  (sauberer Beweis: Abschnitt 6.3)

- *N* Punktladungen: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} q_j \, \frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}|^3}$

  $\rightarrow$ kontinuierliche Ladungsverteilung: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int d^3r' \, \rho(\vec{r}\,') \, \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$

- Es gilt: $\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ (zumindest für $\vec{r} \neq \vec{r}'$)

  $\rightarrow$ $\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})}$

  mit $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int d^3r' \, \rho(\vec{r}\,') \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ „elektrostatisches Potenzial“

  (sauberer Beweis: Abschnitt 6.3)

- Kraftfeld: $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$ mit $V(\vec{r}) = q\phi(\vec{r})$

- N Punktladungen: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} q_j \, \frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,(j)}|^3}$

  $\rightarrow$ kontinuierliche Ladungsverteilung: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int d^3r' \, \rho(\vec{r}\,') \, \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$

- Es gilt: $\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ (zumindest für $\vec{r} \neq \vec{r}\,'$)

  $\rightarrow$ $\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})}$

  mit $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int d^3r' \, \rho(\vec{r}\,') \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ „elektrostatisches Potenzial“

  (sauberer Beweis: Abschnitt 6.3)

- Kraftfeld: $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$ mit $V(\vec{r}) = q\phi(\vec{r})$
  - V: potenzielle Energie
  - ϕ: Potenzial

- wie gehabt: $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \;\Rightarrow\; \vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = \vec{0} \;\Rightarrow\;$ $\vec{F}$ konservativ

- wie gehabt: $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \;\Rightarrow\; \vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = \vec{0} \;\Rightarrow\;$ $\vec{F}$ konservativ
- analog: $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \;\Rightarrow\; \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{0}$

- wie gehabt: $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \;\Rightarrow\; \vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{F}$ konservativ
- analog: $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \;\Rightarrow\; \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{0}$

  $\Rightarrow \int\limits_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{E}(\vec{r}\,') = -\big(\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)\big)$ wegunabhängig

- wie gehabt: $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}$ konservativ
- analog: $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{0}$

  $$\Rightarrow \quad \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{E}(\vec{r}\,') = -\big(\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)\big) = -U(\vec{r}, \vec{r}_0) \quad \text{wegunabhängig}$$

  $U(\vec{r}, \vec{r}_0) \equiv \phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)$ „Spannung“ $\quad [U] = 1\,\mathrm{V}$

- wie gehabt: $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = \vec{0} \quad \Rightarrow$ $\vec{F}$ konservativ

- analog: $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{0}$

  $$\Rightarrow \quad \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{E}(\vec{r}\,') = -\big(\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)\big) = -U(\vec{r}, \vec{r}_0)$$ wegunabhängig

  $U(\vec{r}, \vec{r}_0) \equiv \phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)$ „Spannung“ $\quad [U] = 1\,\mathrm{V}$

- $\phi' = \phi + const \quad \Rightarrow \quad \vec{E}'(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi'(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})$

  ➞ $\phi(\vec{r})$ ist nur bis auf eine Konstante eindeutig („Eichfreiheit“)

- wie gehabt: $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = \vec{0} \quad \Rightarrow$ $\vec{F}$ konservativ
- analog: $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{0}$

  $\Rightarrow \quad \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{E}(\vec{r}\,') = -\big(\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)\big) = -U(\vec{r}, \vec{r}_0)$ wegunabhängig

  $U(\vec{r}, \vec{r}_0) \equiv \phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)$ „Spannung“ $\quad [U] = 1\,\mathrm{V}$
- $\phi' = \phi + const \quad \Rightarrow \quad \vec{E}'(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi'(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})$

  ➞ $\phi(\vec{r})$ ist nur bis auf eine Konstante eindeutig („Eichfreiheit“)

  $U'(\vec{r}, \vec{r}_0) = U(\vec{r}, \vec{r}_0)$ eindeutig!

6.3 Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

6.3 Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Betrachte allgemeines Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$

6.3 Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

Betrachte allgemeines Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$

- Fluss des Feldes durch die Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ eines Volumens $\mathcal{V}$:

$$\Phi \equiv \int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\mathcal{V}} d^3r \, \mathrm{div}\, \vec{A}(\vec{r})$$

6.3 Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

Betrachte allgemeines Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$

- Fluss des Feldes durch die Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ eines Volumens $\mathcal{V}$:

$$\Phi \equiv \int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\mathcal{V}} d^3r \, \mathrm{div}\, \vec{A}(\vec{r})$$

$\Rightarrow \quad \mathrm{div}\, \vec{A}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})$ = Maß für die Quellstärke am Ort $\vec{r}$

6.3 Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

Betrachte allgemeines Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$

- Fluss des Feldes durch die Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ eines Volumens $\mathcal{V}$:

  $$\Phi \equiv \int\limits_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \overset{\text{Gauß}}{=} \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \,\mathrm{div}\, \vec{A}(\vec{r})$$

  $\Rightarrow \quad \mathrm{div}\, \vec{A}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})$ = Maß für die Quellstärke am Ort $\vec{r}$

- Zirkulation des Feldes entlang eines geschlossenen Weges $\partial\mathcal{S}$ (= Rand einer Fläche $\mathcal{S}$):

  $$\Gamma \equiv \oint\limits_{\partial\mathcal{S}} d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \overset{\text{Stokes}}{=} \int\limits_{\mathcal{S}} d\vec{\sigma} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{A}(\vec{r})$$

6.3 Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

Betrachte allgemeines Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$

- Fluss des Feldes durch die Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ eines Volumens $\mathcal{V}$:

$$\Phi \equiv \int\limits_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \overset{\text{Gauß}}{=} \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \mathrm{div}\, \vec{A}(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{div}\, \vec{A}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \text{Maß für die Quellstärke am Ort } \vec{r}$$

- Zirkulation des Feldes entlang eines geschlossenen Weges $\partial\mathcal{S}$ (= Rand einer Fläche $\mathcal{S}$):

$$\Gamma \equiv \oint\limits_{\partial\mathcal{S}} d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \overset{\text{Stokes}}{=} \int\limits_{\mathcal{S}} d\vec{\sigma} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{A}(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{rot}\, \vec{A}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \text{Maß für die Wirbelstärke am Ort } \vec{r}$$

6.3 Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

Betrachte allgemeines Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$

- Fluss des Feldes durch die Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ eines Volumens $\mathcal{V}$:

$$\Phi \equiv \int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\mathcal{V}} d^3r \,\mathrm{div}\, \vec{A}(\vec{r})$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{div}\, \vec{A}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})$ = Maß für die Quellstärke am Ort $\vec{r}$

- Zirkulation des Feldes entlang eines geschlossenen Weges $\partial\mathcal{S}$ (= Rand einer Fläche $\mathcal{S}$):

$$\Gamma \equiv \oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\mathcal{S}} d\vec{\sigma} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{A}(\vec{r})$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{rot}\, \vec{A}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$ = Maß für die Wirbelstärke am Ort $\vec{r}$

- Theorem: *Vektorfelder, die hinreichend schnell im Unendlichen verschwinden, lassen sich eindeutig aus ihren Quellen und Wirbeln rekonstruieren.*