4. Lagrange-Mechanik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4.1 Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4.1 Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

- N Punktmassen:
  - Bewegungsgleichungen: $m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} = \vec{F}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N$
  - Zahl der Freiheitsgrade: $s = 3N$

  → $3N$ gekoppelte Differenzialgln. 2. Ordnung

- Zwangsbedingungen = geometrische Einschänkungen der Bewegung

  → $s \leq 3N$

4.1 Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- N Punktmassen:
  - Bewegungsgleichungen: $m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} = \vec{F}^{(i)}, \quad i = 1, \ldots, N$
  - Zahl der Freiheitsgrade: $s = 3N$

  → $3N$ gekoppelte Differenzialgln. 2. Ordnung

- Zwangsbedingungen = geometrische Einschänkungen der Bewegung

  → $s \leq 3N$

  Beispiele:

  - starrer Körper: $s = 6$
  - Rotator mit fester Achse: $s = 1$ (Drehwinkel φ)

4.1 Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- N Punktmassen:
  - Bewegungsgleichungen: $m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} = \vec{F}^{\,(i)}, \quad i = 1, \ldots, N$
  - Zahl der Freiheitsgrade: $s = 3N$

→ $3N$ gekoppelte Differenzialgln. 2. Ordnung

- Zwangsbedingungen = geometrische Einschänkungen der Bewegung

→ $s \leq 3N$

Beispiele:

  - starrer Körper: $s = 6$
  - Rotator mit fester Achse: $s = 1$ (Drehwinkel φ)

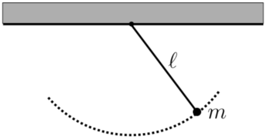
- Zwangskräfte = Kräfte, die die Zwangsbedingungen bewirken

Weitere Beispiele

- mathematisches Pendel:
  - $(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = \ell^2, \quad \vec{r}_0$ = Aufhängepunkt

    → Bewegung von m auf Kugeloberfläche

    → zwei Freiheitsgrade
  - Zwangskraft durch den Faden



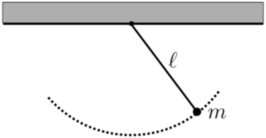
Weitere Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- mathematisches Pendel:
  - $(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = \ell^2, \quad \vec{r}_0 =$ Aufhängepunkt

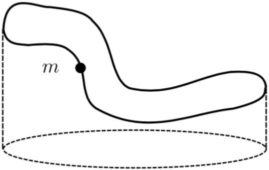
    ➞ Bewegung von m auf Kugeloberfläche

    ➞ zwei Freiheitsgrade
  - Zwangskraft durch den Faden



- Achterbahn:
  - Bewegung auf vorgegebener Bahnkurve $\mathcal{C}$

    ➞ ein Freiheitsgrad (= Bahnparameter, z.B. zurückgelegte Wegstrecke)
  - Zwangskraft durch die Schienen



Klassifizierung von Zwangsbedingungen

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Klassifizierung von Zwangsbedingungen

- holonome Zwangsbedingungen
  = Zwangsbedingungen in der Form $f_i(\vec{r}^{\,(1)}, \vec{r}^{\,(2)}, \dots, \vec{r}^{\,(N)}, t) = 0$

Klassifizierung von Zwangsbedingungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- holonome Zwangsbedingungen
  = Zwangsbedingungen in der Form $f_i(\vec{r}^{\,(1)}, \vec{r}^{\,(2)}, \dots, \vec{r}^{\,(N)}, t) = 0$
  - k unabhängige holonome Zwangsbed. $f_i = 0, \; i = 1, \dots, k$

    $\rightarrow$ $s = 3N - k$ Freiheitsgrade

Klassifizierung von Zwangsbedingungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- holonome Zwangsbedingungen

  = Zwangsbedingungen in der Form $f_i(\vec{r}^{\,(1)}, \vec{r}^{\,(2)}, \dots, \vec{r}^{\,(N)}, t) = 0$

  - k unabhängige holonome Zwangsbed. $f_i = 0, \;\; i = 1, \dots, k$

    $\rightarrow \;\; s = 3N - k$ Freiheitsgrade

  weitere Unterteilung:

  - skleronome Zwangsbedingungen: $\frac{\partial f_i}{\partial t} = 0$, d.h. nicht explizit zeitabh.
  - rheonome Zwangsbedingungen: explizit zeitabhängig

Klassifizierung von Zwangsbedingungen

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- holonome Zwangsbedingungen

  = Zwangsbedingungen in der Form $\quad f_i(\vec{r}^{\,(1)}, \vec{r}^{\,(2)}, \dots, \vec{r}^{\,(N)}, t) = 0$

  - k unabhängige holonome Zwangsbed. $\quad f_i = 0, \; i = 1, \dots, k$

    $\rightarrow \; s = 3N - k$ Freiheitsgrade

  weitere Unterteilung:

  - skleronome Zwangsbedingungen: $\frac{\partial f_i}{\partial t} = 0$, d.h. nicht explizit zeitabh.
  - rheonome Zwangsbedingungen: explizit zeitabhängig

- nicht-holonome Zwangsbedingungen:

  schränken die Bewegung ein, reduzieren aber nicht die Zahl der Freiheitsgrade

Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- mathematisches Pendel: $(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = \ell^2$

  $\rightarrow$ $k = 1$ holonome Zwangsbedingung: $f(\vec{r}) \equiv (\vec{r} - \vec{r}_0)^2 - \ell^2 = 0$

  $\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial t} = 0 \rightarrow$ skleronom

  $N = 1$ Teilchen $\Rightarrow$ $s = 3 - 1 = 2$ Freiheitsgrade $\checkmark$

Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- mathematisches Pendel: $(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = \ell^2$

  ➞ $k = 1$ holonome Zwangsbedingung: $f(\vec{r}) \equiv (\vec{r} - \vec{r}_0)^2 - \ell^2 = 0$

  $\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial t} = 0$ ➞ skleronom

  $N = 1$ Teilchen $\Rightarrow$ $s = 3 - 1 = 2$ Freiheitsgrade ✓

- Pendel mit zeitabhängigem Aufhängepunkt: z.B. $\vec{r}_0(t) = A\cos(\omega t)\,\vec{e}_z$

  ➞ holonome rheonome Zwangsbedingung: $f(\vec{r}, t) \equiv (\vec{r} - \vec{r}_0(t))^2 - \ell^2 = 0$

  nach wie vor: $N = 1$, $k = 1$ $\Rightarrow$ $s = 3 - 1 = 2$

Beispiele

- mathematisches Pendel: $(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = \ell^2$

  ➞ $k = 1$ holonome Zwangsbedingung: $f(\vec{r}) \equiv (\vec{r} - \vec{r}_0)^2 - \ell^2 = 0$

  $\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial t} = 0$ ➞ skleronom

  $N = 1$ Teilchen $\Rightarrow$ $s = 3 - 1 = 2$ Freiheitsgrade ✓

- Pendel mit zeitabhängigem Aufhängepunkt: z.B. $\vec{r}_0(t) = A\cos(\omega t)\,\vec{e}_z$

  ➞ holonome rheonome Zwangsbedingung: $f(\vec{r}, t) \equiv (\vec{r} - \vec{r}_0(t))^2 - \ell^2 = 0$

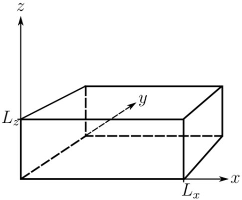
  nach wie vor: $N = 1$, $k = 1$ $\Rightarrow$ $s = 3 - 1 = 2$

- N Teilchen im Kasten:

  $$0 < x < L_x, \quad 0 < y < L_y, \quad 0 < z < L_z$$

  = nicht-holonome Zwangsbedingungen

  ➞ unverändert $s = 3N$



4.2 Die Lagrange-Gleichungen 1. Art

4.2 Die Lagrange-Gleichungen 1. Art

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Teilchen auf einer Fläche (i.A. gekrümmt, zeitabhängig)

  → holonome Zwangsbedingung $f(\vec{r}, t) = 0$ → Zwangskraft $\vec{F}_Z$

4.2 Die Lagrange-Gleichungen 1. Art

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Teilchen auf einer Fläche (i.A. gekrümmt, zeitabhängig)

  $\rightarrow$ holonome Zwangsbedingung $f(\vec{r}, t) = 0$ $\rightarrow$ Zwangskraft $\vec{F}_Z$

  + „freie“ äußere Kraft $\vec{F}$ $\Rightarrow$ Bewegungsgleichung: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_Z$

4.2 Die Lagrange-Gleichungen 1. Art

- Teilchen auf einer Fläche (i.A. gekrümmt, zeitabhängig)

  $\rightarrow$ holonome Zwangsbedingung $f(\vec{r}, t) = 0$ $\rightarrow$ Zwangskraft $\vec{F}_Z$

  + „freie“ äußere Kraft $\vec{F}$ $\Rightarrow$ Bewegungsgleichung: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_Z$

- Problem: $\vec{F}_Z$ zunächst unbekannt

4.2 Die Lagrange-Gleichungen 1. Art

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Teilchen auf einer Fläche (i.A. gekrümmt, zeitabhängig)

  ➞ holonome Zwangsbedingung $f(\vec{r}, t) = 0$ ➞ Zwangskraft $\vec{F}_Z$

  + „freie" äußere Kraft $\vec{F}$ $\Rightarrow$ Bewegungsgleichung: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_Z$

- Problem: $\vec{F}_Z$ zunächst unbekannt

- Eigenschaft $\vec{F}_Z$ beeinflusst die Bewegung auf der Fläche nicht

4.2 Die Lagrange-Gleichungen 1. Art

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Teilchen auf einer Fläche (i.A. gekrümmt, zeitabhängig)

  $\rightarrow$ holonome Zwangsbedingung $f(\vec{r}, t) = 0$ $\rightarrow$ Zwangskraft $\vec{F}_Z$

  + „freie“ äußere Kraft $\vec{F}$ $\Rightarrow$ Bewegungsgleichung: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_Z$

- Problem: $\vec{F}_Z$ zunächst unbekannt

- Eigenschaft $\vec{F}_Z$ beeinflusst die Bewegung auf der Fläche nicht

  $\Rightarrow$ $\vec{F}_Z \perp$ Fläche

4.2 Die Lagrange-Gleichungen 1. Art

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Teilchen auf einer Fläche (i.A. gekrümmt, zeitabhängig)

  → holonome Zwangsbedingung $f(\vec{r}, t) = 0$ → Zwangskraft $\vec{F}_Z$

  + „freie" äußere Kraft $\vec{F}$ $\Rightarrow$ Bewegungsgleichung: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_Z$
- Problem: $\vec{F}_Z$ zunächst unbekannt
- Eigenschaft $\vec{F}_Z$ beeinflusst die Bewegung auf der Fläche nicht

  $\Rightarrow$ $\vec{F}_Z \perp$ Fläche
- Behauptung: $\vec{\nabla} f(\vec{r}, t) \perp$ Fläche

4.2 Die Lagrange-Gleichungen 1. Art

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Teilchen auf einer Fläche (i.A. gekrümmt, zeitabhängig)

  → holonome Zwangsbedingung $f(\vec{r}, t) = 0$ → Zwangskraft $\vec{F}_Z$

  + „freie" äußere Kraft $\vec{F}$ $\Rightarrow$ Bewegungsgleichung: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_Z$

- Problem: $\vec{F}_Z$ zunächst unbekannt

- Eigenschaft $\vec{F}_Z$ beeinflusst die Bewegung auf der Fläche nicht

  $\Rightarrow$ $\vec{F}_Z \perp$ Fläche

- Behauptung: $\vec{\nabla} f(\vec{r}, t) \perp$ Fläche

  Bew.: Änderung von f bei infinitesimaler Änderung von $\vec{r}$ und t:

$$df = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial r_i} dr_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

4.2 Die Lagrange-Gleichungen 1. Art

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Teilchen auf einer Fläche (i.A. gekrümmt, zeitabhängig)

  $\rightarrow$ holonome Zwangsbedingung $f(\vec{r}, t) = 0$ $\rightarrow$ Zwangskraft $\vec{F}_Z$

  + „freie" äußere Kraft $\vec{F}$ $\Rightarrow$ Bewegungsgleichung: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_Z$

- Problem: $\vec{F}_Z$ zunächst unbekannt

- Eigenschaft $\vec{F}_Z$ beeinflusst die Bewegung auf der Fläche nicht

  $\Rightarrow$ $\vec{F}_Z \perp$ Fläche

- Behauptung: $\vec{\nabla} f(\vec{r}, t) \perp$ Fläche

  Bew.: Änderung von f bei infinitesimaler Änderung von $\vec{r}$ und t:

  $$df = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial r_i} dr_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

  Verschiebung $d\vec{r}$ auf der Fläche $f = 0$ ($\Rightarrow$ $df = 0$) zu fester Zeit ($dt = 0$)

  $$\Rightarrow \quad df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} f(\vec{r}, t) \perp \text{Fläche} \quad \checkmark$$

→ Ansatz für die Zwangskraft: $\vec{F}_Z = \lambda \vec{\nabla} f, \quad \lambda$: unbestimmter Parameter

$\rightarrow$ Ansatz für die Zwangskraft: $\vec{F}_Z = \lambda \vec{\nabla} f$, λ: unbestimmter Parameter

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \text{Bewegungsgl.:} & m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda \vec{\nabla} f & \text{(3 Gln.)} \\ \text{Zwangsbed.:} & f = 0 & \text{(1 Gleichung)} \end{array} \right\} \text{4 Gln. für } x, y, z, \lambda$$

→ Ansatz für die Zwangskraft: $\vec{F}_Z = \lambda \vec{\nabla} f, \quad \lambda$: unbestimmter Parameter

$$\Rightarrow \left. \begin{cases} \text{Bewegungsgl.:} & m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda \vec{\nabla} f & \text{(3 Gln.)} \\ \text{Zwangsbed.:} & f = 0 & \text{(1 Gleichung)} \end{cases} \right\} \text{4 Gln. für } x, y, z, \lambda$$

- Bewegung auf einer Kurve im Raum

→ 2 Zwangsbedingungen $f_i(\vec{r}, t) = 0, \quad i = 1, 2$

→ Ansatz für die Zwangskraft: $\vec{F}_Z = \lambda \vec{\nabla} f$, $\quad \lambda$: unbestimmter Parameter

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} \text{Bewegungsgl.:} & m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda\vec{\nabla} f \quad \text{(3 Gln.)} \\ \text{Zwangsbed.:} & f = 0 \quad \text{(1 Gleichung)} \end{cases}\right\} \text{4 Gln. für } x, y, z, \lambda$$

- Bewegung auf einer Kurve im Raum

→ 2 Zwangsbedingungen $f_i(\vec{r}, t) = 0, \quad i = 1, 2$

$$\vec{F}_Z \perp \text{Kurve} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_Z = \lambda_1 \vec{\nabla} f_1 + \lambda_2 \vec{\nabla} f_2,$$

→ Ansatz für die Zwangskraft: $\vec{F}_Z = \lambda \vec{\nabla} f$, $\quad \lambda$: unbestimmter Parameter

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \text{Bewegungsgl.:} & m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda\vec{\nabla} f & \text{(3 Gln.)} \\ \text{Zwangsbed.:} & f = 0 & \text{(1 Gleichung)} \end{array} \right\} \text{4 Gln. für } x, y, z, \lambda$$

- Bewegung auf einer Kurve im Raum

  → 2 Zwangsbedingungen $f_i(\vec{r}, t) = 0, \quad i = 1, 2$

$$\vec{F}_Z \perp \text{Kurve} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_Z = \lambda_1 \vec{\nabla} f_1 + \lambda_2 \vec{\nabla} f_2,$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} m\ddot{\vec{r}} & = & \vec{F} + \lambda_1 \vec{\nabla} f_1 + \lambda_2 \vec{\nabla} f_2 \\ f_1 & = & 0 \\ f_2 & = & 0 \end{array} \right\} \text{5 Gln. für } x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$$

- N Punktmassen m_i,
  k unabhängige Zwangsbedingungen $f_j(\vec{r}^{\,(1)}, \ldots, \vec{r}^{\,(N)}, t) = 0, \quad j = 1, \ldots, k$

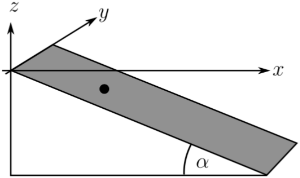
$$\Rightarrow \quad \boxed{m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} = \vec{F}^{\,(i)} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{\nabla}^{\,(i)} f_j, \qquad i = 1, \ldots, N}$$

„Lagrange-Gleichungen 1. Art“

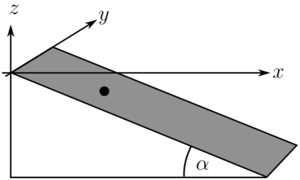
λ_j: „Lagrange-Parameter“, „Lagrange-Multiplikatoren“

Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



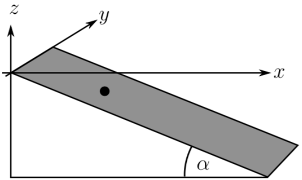
Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene



- Zwangsbedingung:

  $$z = -x \tan\alpha \quad \Leftrightarrow \quad f(x, y, z) \equiv z + x \tan\alpha = 0$$

Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene

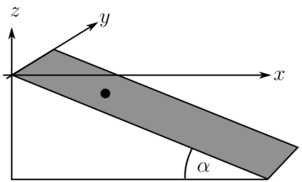


- Zwangsbedingung:

$$z = -x \tan\alpha \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y,z) \equiv z + x \tan\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene



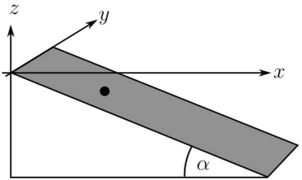
- **Zwangsbedingung:**

  $$z = -x \tan\alpha \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y,z) \equiv z + x \tan\alpha = 0$$

  $$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Schwerkraft:** $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$, keine Reibung

Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene



- Zwangsbedingung:

$$z = -x \tan\alpha \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y,z) \equiv z + x \tan\alpha = 0$$

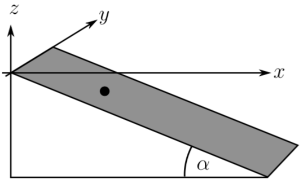
$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Schwerkraft: $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$, keine Reibung

- Lagrange: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda\vec{\nabla} f \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m\ddot{x} = \lambda \tan\alpha & (1) \\ m\ddot{y} = 0 & (2) \\ m\ddot{z} = -mg + \lambda & (3) \end{cases}$

Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- Zwangsbedingung:

$$z = -x \tan\alpha \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y,z) \equiv z + x\tan\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

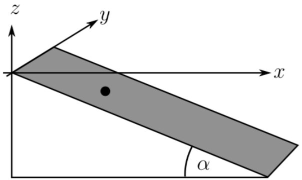
- Schwerkraft: $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$, keine Reibung

- Lagrange: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda\vec{\nabla} f \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m\ddot{x} = \lambda\tan\alpha & (1) \\ m\ddot{y} = 0 & (2) \\ m\ddot{z} = -mg + \lambda & (3) \end{cases}$

- $f = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = m\ddot{f} = m\ddot{z} + m\ddot{x}\tan\alpha$

Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- Zwangsbedingung:

$$z = -x \tan\alpha \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y,z) \equiv z + x \tan\alpha = 0$$

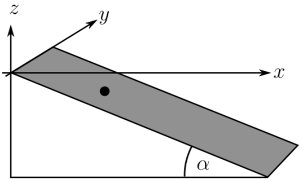
$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Schwerkraft: $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$, keine Reibung

- Lagrange: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda\vec{\nabla} f \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcll} m\ddot{x} & = & \lambda \tan\alpha & (1) \\ m\ddot{y} & = & 0 & (2) \\ m\ddot{z} & = & -mg + \lambda & (3) \end{array} \right.$

- $f = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = m\ddot{f} = m\ddot{z} + m\ddot{x} \tan\alpha \overset{(1),(3)}{=} -mg + \lambda + \lambda \tan^2\alpha$

Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene



- Zwangsbedingung:

$$z = -x \tan\alpha \quad \Leftrightarrow \quad f(x, y, z) \equiv z + x \tan\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

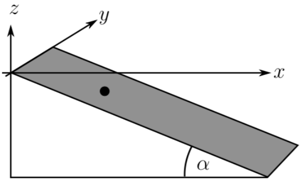
- Schwerkraft: $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$, keine Reibung

- Lagrange: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda\vec{\nabla} f \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m\ddot{x} = \lambda \tan\alpha & (1) \\ m\ddot{y} = 0 & (2) \\ m\ddot{z} = -mg + \lambda & (3) \end{cases}$

- $f = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = m\ddot{f} = m\ddot{z} + m\ddot{x} \tan\alpha \overset{(1),(3)}{=} -mg + \lambda + \lambda \tan^2\alpha = -mg + \frac{\lambda}{\cos^2\alpha}$

Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- Zwangsbedingung:

$$z = -x \tan\alpha \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y,z) \equiv z + x\tan\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Schwerkraft: $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$, keine Reibung

- Lagrange: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda\vec{\nabla} f \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m\ddot{x} = \lambda\tan\alpha & (1) \\ m\ddot{y} = 0 & (2) \\ m\ddot{z} = -mg + \lambda & (3) \end{cases}$

- $f = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = m\ddot{f} = m\ddot{z} + m\ddot{x}\tan\alpha \overset{(1),(3)}{=} -mg + \lambda + \lambda\tan^2\alpha = -mg + \frac{\lambda}{\cos^2\alpha}$

$$\Rightarrow \quad \lambda = mg\cos^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_Z = \lambda\vec{\nabla} f = mg\begin{pmatrix} \cos\alpha\sin\alpha \\ 0 \\ \cos^2\alpha \end{pmatrix}$$

Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene

- Gesamtkraft:

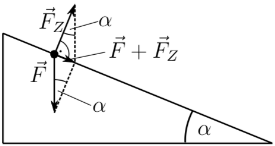
$$\vec{F}_Z + \vec{F} = mg \begin{pmatrix} \cos\alpha \sin\alpha \\ 0 \\ \cos^2\alpha - 1 \end{pmatrix} = mg \sin\alpha \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}$$

Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gesamtkraft:

$$\vec{F}_Z + \vec{F} = mg \begin{pmatrix} \cos\alpha \sin\alpha \\ 0 \\ \cos^2\alpha - 1 \end{pmatrix} = mg \sin\alpha \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}$$



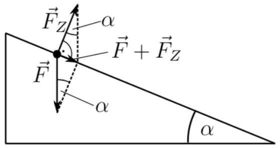
- kann man auch geometrisch konstruieren:
  Aber Lagrange ist einfacher!

Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gesamtkraft:

$$\vec{F}_Z + \vec{F} = mg \begin{pmatrix} \cos\alpha \sin\alpha \\ 0 \\ \cos^2\alpha - 1 \end{pmatrix} = mg \sin\alpha \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}$$



- kann man auch geometrisch konstruieren:
  Aber Lagrange ist einfacher!

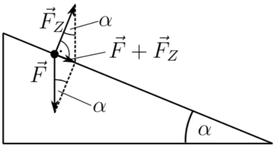
- Bewegungsgleichungen:
  - $m\ddot{x} = mg \cos\alpha \sin\alpha$
  - $m\ddot{y} = 0$
  - $m\ddot{z} = -mg \sin^2\alpha$

Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gesamtkraft:

$$\vec{F}_Z + \vec{F} = mg \begin{pmatrix} \cos\alpha \sin\alpha \\ 0 \\ \cos^2\alpha - 1 \end{pmatrix} = mg \sin\alpha \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}$$



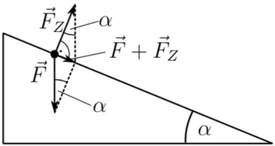
- kann man auch geometrisch konstruieren:
  Aber Lagrange ist einfacher!

- Bewegungsgleichungen:
  - $m\ddot{x} = mg \cos\alpha \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + v_{x,0}\, t + \frac{1}{2} g \cos\alpha \sin\alpha\, t^2$
  - $m\ddot{y} = 0$
  - $m\ddot{z} = -mg \sin^2\alpha$

Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene

- Gesamtkraft:

$$\vec{F}_Z + \vec{F} = mg \begin{pmatrix} \cos\alpha \sin\alpha \\ 0 \\ \cos^2\alpha - 1 \end{pmatrix} = mg \sin\alpha \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}$$



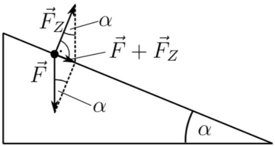
- kann man auch geometrisch konstruieren:
  Aber Lagrange ist einfacher!

- Bewegungsgleichungen:
  - $m\ddot{x} = mg\cos\alpha\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + v_{x,0}\,t + \frac{1}{2}g\cos\alpha\sin\alpha\,t^2$
  - $m\ddot{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = y_0 + v_{y,0}\,t$
  - $m\ddot{z} = -mg\sin^2\alpha$

Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene

- Gesamtkraft:

$$\vec{F}_Z + \vec{F} = mg \begin{pmatrix} \cos\alpha \sin\alpha \\ 0 \\ \cos^2\alpha - 1 \end{pmatrix} = mg \sin\alpha \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}$$



- kann man auch geometrisch konstruieren:
  Aber Lagrange ist einfacher!

- Bewegungsgleichungen:
  - $m\ddot{x} = mg \cos\alpha \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + v_{x,0}\, t + \frac{1}{2} g \cos\alpha \sin\alpha\, t^2$
  - $m\ddot{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = y_0 + v_{y,0}\, t$
  - $m\ddot{z} = -mg \sin^2\alpha$

  $$z(t) \overset{\text{Zwangsbed.}}{=} -x(t) \tan\alpha = -x_0 \tan\alpha - v_{x,0} \tan\alpha\, t - \frac{1}{2} g \sin^2\alpha\, t^2$$