Lineare Algebra: Jede symmetrische reelle Matrix ist diagonalisierbar

→ Man kann das Koordinatensystem so drehen, dass

$$\underline{\underline{J}}' = \begin{pmatrix} J'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J'_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix}$$

Lineare Algebra: Jede symmetrische reelle Matrix ist diagonalisierbar

→ Man kann das Koordinatensystem so drehen, dass

$$\underline{\underline{J}}' = \begin{pmatrix} J'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J'_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix}$$

- Achsen dieses Koordinatensystems: Hauptträgheitsachsen
  $\leftrightarrow$ orthogonale Einheitsbasis: $\vec{n}_\xi$, $\vec{n}_\eta$, $\vec{n}_\zeta$
- Eigenwerte von $\underline{\underline{J}}$ (J_ξ, J_η und J_ζ): Hauptträgheitsmomente

Lineare Algebra: Jede symmetrische reelle Matrix ist diagonalisierbar

➞ Man kann das Koordinatensystem so drehen, dass

$$\underline{\underline{J}}' = \begin{pmatrix} J'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J'_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix}$$

- Achsen dieses Koordinatensystems: Hauptträgheitsachsen

  $\leftrightarrow$ orthogonale Einheitsbasis: $\vec{n}_\xi$, $\vec{n}_\eta$, $\vec{n}_\zeta$
- Eigenwerte von $\underline{\underline{J}}$ (J_ξ, J_η und J_ζ): Hauptträgheitsmomente

➞ 6 unabhängige Größen:

3 Hauptträgheitsmomente + Richtungen der Hauptträgheitsachsen (3 Winkel)

$\leftrightarrow$ 6 unabhängige Komponenten von $\underline{\underline{J}}$

- Auswertung der Rotationsenergie im Hauptträgheitssystem:

$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad T_{rot} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}^T \underline{\underline{J}}\,\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(J_\xi\,\omega_\xi^2 + J_\eta\,\omega_\eta^2 + J_\zeta\,\omega_\zeta^2\right)$$

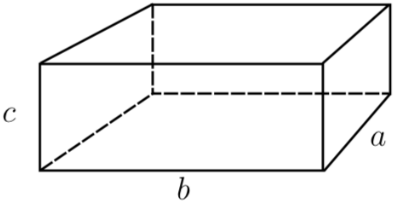
- Auswertung der Rotationsenergie im Hauptträgheitssystem:

$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad T_{rot} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}^T \underline{\underline{J}}\,\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(J_\xi\,\omega_\xi^2 + J_\eta\,\omega_\eta^2 + J_\zeta\,\omega_\zeta^2\right)$$

- Klassifizierung:
  - Kugelkreisel: $J_\xi = J_\eta = J_\zeta$
  - symmetrischer Kreisel: $J_i = J_j \neq J_k, \quad \{i, j, k\} = \{\xi, \eta, \zeta\}$
  - unsymmetrischer Kreisel: $J_\xi \neq J_\eta \neq J_\zeta \neq J_\xi$

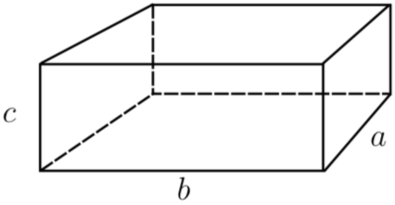
Beispiel: Quader



- Kantenlängen a, b, c
- homogene Massendichte ρ_0

$\Rightarrow$ $M = \rho_0\, abc$

Beispiel: Quader

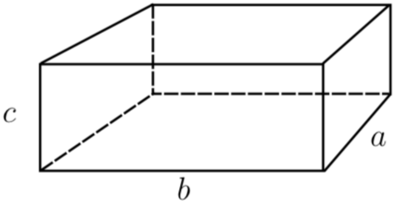


- Kantenlängen a, b, c
- homogene Massendichte ρ_0

$\Rightarrow \quad M = \rho_0\, abc$

- Koordinatensystem:
  - Ursprung = Schwerpunkt
  - Koordinatenachsen parallel zu den Kanten

Beispiel: Quader

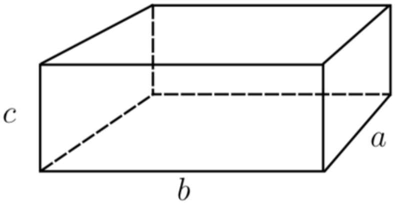


- Kantenlängen a, b, c
- homogene Massendichte ρ_0

$\Rightarrow \quad M = \rho_0\, abc$

- Koordinatensystem:
  - Ursprung = Schwerpunkt
  - Koordinatenachsen parallel zu den Kanten

$$\Rightarrow \quad J_{\alpha\beta} = \int d^3r\, \rho(\vec{r}) \left(\vec{r}^{\,2}\delta_{\alpha\beta} - r_\alpha r_\beta\right) = \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz \left(\vec{r}^{\,2}\delta_{\alpha\beta} - r_\alpha r_\beta\right)$$



- Kantenlängen a, b, c
- homogene Massendichte ρ_0
- Ursprung = Schwerpunkt
- Koordinatenachsen parallel zu den Kanten

$$\Rightarrow \underline{\underline{J}} = \frac{M}{12}\begin{pmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2+a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$ diagonal!

Hauptträgheitsachsen: $\xi = x, \eta = y, \zeta = z$

Haupttägheitsmomente: $J_\xi = \frac{M}{12}(b^2+c^2),\ J_\eta = \frac{M}{12}(c^2+a^2),\ J_\zeta = \frac{M}{12}(a^2+b^2)$

Verschiebung des Koordinatenursprungs

zwei verschiedene körperfeste Koordinatensysteme

K^*: Ursprung = Schwerpunkt

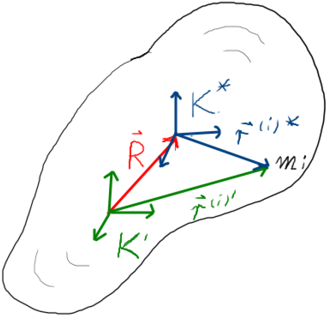
Ortsvektor des Massepunkts m_i: $\vec{r}^{\,(i)*}$

K': Ursprung beliebig

Ortsvektor des Massepunkts m_i: $\vec{r}^{\,(i)\prime}$

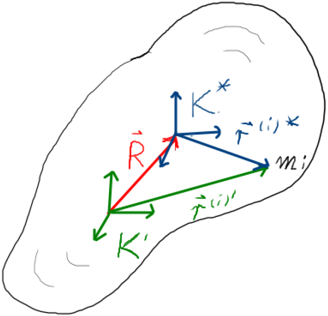
Ortsvektor des Schwerpunkts: $\vec{R}$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}^{\,(i)\prime} = \vec{R} + \vec{r}^{\,(i)*}$$



Verschiebung des Koordinatenursprungs

zwei verschiedene körperfeste Koordinatensysteme



K^*: Ursprung = Schwerpunkt

Ortsvektor des Massepunkts m_i: $\vec{r}^{\,(i)*}$

K': Ursprung beliebig

Ortsvektor des Massepunkts m_i: $\vec{r}^{\,(i)\prime}$

Ortsvektor des Schwerpunkts: $\vec{R}$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}^{\,(i)\prime} = \vec{R} + \vec{r}^{\,(i)*}$$

- Trägheitstensor bzgl. einer Drehachse durch den Ursprung von K':

$$J_{\alpha\beta} = \sum_i m_i \left[\vec{r}^{\,(i)\prime\,2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)\prime} r_\beta^{(i)\prime} \right]$$
$$= \sum_i m_i \left[(\vec{R} + \vec{r}^{\,(i)*})^2 \delta_{\alpha\beta} - (R_\alpha + r_\alpha^{(i)*})(R_\beta + r_\beta^{(i)*}) \right]$$

- Trägheitstensor bzgl. einer Drehachse durch den Ursprung von K':

$$J_{\alpha\beta} = \sum_i m_i \left[(\vec{R} + \vec{r}^{\,(i)*})^2 \delta_{\alpha\beta} - (R_\alpha + r_\alpha^{(i)*})(R_\beta + r_\beta^{(i)*}) \right]$$

- Trägheitstensor bzgl. einer Drehachse durch den Ursprung von K':

$$J_{\alpha\beta} = \sum_i m_i \left[(\vec{R} + \vec{r}^{\,(i)*})^2 \delta_{\alpha\beta} - (R_\alpha + r_\alpha^{(i)*})(R_\beta + r_\beta^{(i)*})\right]$$

$$= \sum_i m_i \left(\vec{R}^{\,2} \delta_{\alpha\beta} - R_\alpha R_\beta\right) + \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)*2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)*} r_\beta^{(i)*}\right)$$

$$+ 2\vec{R} \cdot \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)*}}_{=\vec{0}} \delta_{\alpha\beta} - R_\alpha \underbrace{\sum_i m_i r_\beta^{(i)*}}_{=0} - R_\beta \underbrace{\sum_i m_i r_\alpha^{(i)*}}_{=0}$$

- Trägheitstensor bzgl. einer Drehachse durch den Ursprung von K':

$$
\begin{aligned}
J_{\alpha\beta} &= \sum_i m_i \left[(\vec{R} + \vec{r}^{\,(i)*})^2 \delta_{\alpha\beta} - (R_\alpha + r_\alpha^{(i)*})(R_\beta + r_\beta^{(i)*}) \right] \\
&= \sum_i m_i \left(\vec{R}^{\,2} \delta_{\alpha\beta} - R_\alpha R_\beta \right) + \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)*\,2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)*} r_\beta^{(i)*} \right) \\
&\quad + 2\vec{R} \cdot \underbrace{\sum_i m_i \, \vec{r}^{\,(i)*}}_{=\vec{0}} \delta_{\alpha\beta} - R_\alpha \underbrace{\sum_i m_i \, r_\beta^{(i)*}}_{=0} - R_\beta \underbrace{\sum_i m_i \, r_\alpha^{(i)*}}_{=0} \\
&= M \left(\vec{R}^{\,2} \delta_{\alpha\beta} - R_\alpha R_\beta \right) + \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)*\,2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)*} r_\beta^{(i)*} \right)
\end{aligned}
$$

- Trägheitstensor bzgl. einer Drehachse durch den Ursprung von K':

$$J_{\alpha\beta} = \sum_i m_i \left[(\vec{R} + \vec{r}^{\,(i)*})^2 \delta_{\alpha\beta} - (R_\alpha + r_\alpha^{(i)*})(R_\beta + r_\beta^{(i)*})\right]$$

$$= \sum_i m_i \left(\vec{R}^{\,2}\delta_{\alpha\beta} - R_\alpha R_\beta\right) + \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)*2}\delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)*} r_\beta^{(i)*}\right)$$

$$+ 2\vec{R} \cdot \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)*}}_{=\vec{0}} \delta_{\alpha\beta} - R_\alpha \underbrace{\sum_i m_i r_\beta^{(i)*}}_{=0} - R_\beta \underbrace{\sum_i m_i r_\alpha^{(i)*}}_{=0}$$

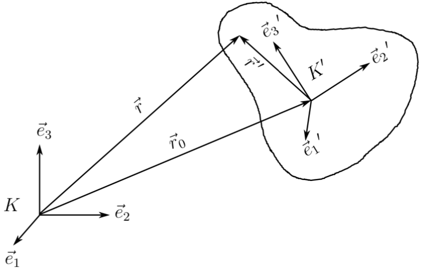
$$= M \left(\vec{R}^{\,2}\delta_{\alpha\beta} - R_\alpha R_\beta\right) + \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)*2}\delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)*} r_\beta^{(i)*}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{J_{\alpha\beta} = J^*_{\alpha\beta} + M\left(\vec{R}^{\,2}\delta_{\alpha\beta} - R_\alpha R_\beta\right)}$$

„Steiner'scher Satz"

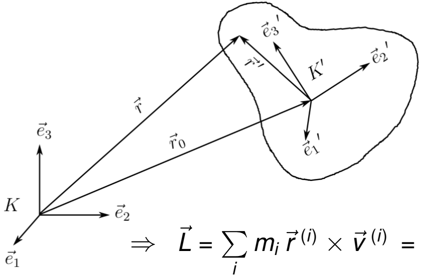
$J^*_{\alpha\beta}$ =Trägheitstensor bzgl. einer Drehachse durch den Schwerpunkt

3.5 Der Drehimpuls des starren Körpers



- Punkte des starren Körpers:
  - $\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}_0 + \vec{r}^{\,(i)\prime}$
  - $\vec{v}^{\,(i)} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}$

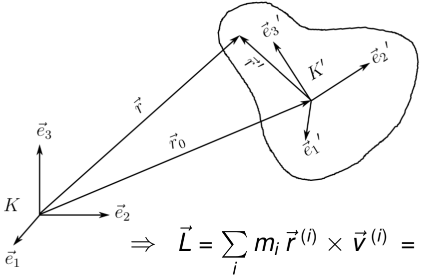
3.5 Der Drehimpuls des starren Körpers



- Punkte des starren Körpers:
  - $\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}_0 + \vec{r}^{\,(i)\prime}$
  - $\vec{v}^{\,(i)} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{v}^{\,(i)} = \sum_i m_i \left(\vec{r}_0 + \vec{r}^{\,(i)\prime}\right) \times \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)$$

3.5 Der Drehimpuls des starren Körpers

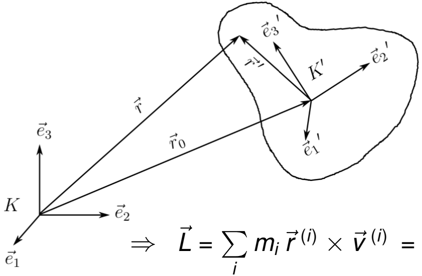


- Punkte des starren Körpers:
  - $\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}_0 + \vec{r}^{\,(i)\prime}$
  - $\vec{v}^{\,(i)} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{v}^{\,(i)} = \sum_i m_i \left(\vec{r}_0 + \vec{r}^{\,(i)\prime}\right) \times \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)$$

$$= \sum_i m_i\, \vec{r}_0 \times \vec{v}_0 + \sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)\prime} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}) + \vec{r}_0 \times \left(\vec{\omega} \times \sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)\prime}\right) + \sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)\prime} \times \vec{v}_0$$

3.5 Der Drehimpuls des starren Körpers



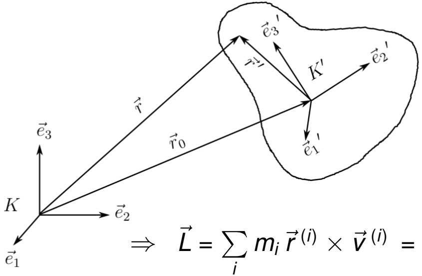
- Punkte des starren Körpers:
  - $\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}_0 + \vec{r}^{\,(i)\prime}$
  - $\vec{v}^{\,(i)} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{v}^{\,(i)} = \sum_i m_i \left(\vec{r}_0 + \vec{r}^{\,(i)\prime}\right) \times \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)$$

$$= \underbrace{\sum_i m_i\, \vec{r}_0 \times \vec{v}_0}_{\vec{L}_{\text{Bahn}}} + \underbrace{\sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)\prime} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime})}_{\vec{L}_{\text{in}}} + \underbrace{\vec{r}_0 \times \left(\vec{\omega} \times \sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)\prime}\right) + \sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)\prime} \times \vec{v}_0}_{=0}$$

(für Ursprung von K' = Schwerpunkt)

3.5 Der Drehimpuls des starren Körpers



- Punkte des starren Körpers:
  - $\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}_0 + \vec{r}^{\,(i)\prime}$
  - $\vec{v}^{\,(i)} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{v}^{\,(i)} = \sum_i m_i \left(\vec{r}_0 + \vec{r}^{\,(i)\prime}\right) \times \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)$$

$$= \underbrace{\sum_i m_i\, \vec{r}_0 \times \vec{v}_0}_{\vec{L}_{\text{Bahn}}} + \underbrace{\sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)\prime} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime})}_{\vec{L}_{\text{in}}} + \underbrace{\vec{r}_0 \times \left(\vec{\omega} \times \sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)\prime}\right) + \sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)\prime} \times \vec{v}_0}_{=0}$$

(für Ursprung von K' = Schwerpunkt)

- $\vec{L}_{Bahn} = M\, \vec{r}_0 \times \vec{v}_0 \equiv \vec{R} \times \vec{P}$ mit $\vec{R} \equiv \vec{r}_0$, $\vec{P} \equiv M\vec{v}_0$

- innerer Drehimpuls:

$$\vec{L}_{in} = \sum_i m_i \, \vec{r}^{\,(i)\prime} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}) = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime 2} \vec{\omega} - (\vec{r}^{\,(i)\prime} \cdot \vec{\omega}) \, \vec{r}^{\,(i)\prime} \right)$$

- innerer Drehimpuls:

$$\vec{L}_{in} = \sum_i m_i \, \vec{r}^{\,(i)\prime} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}) = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime 2} \vec{\omega} - (\vec{r}^{\,(i)\prime} \cdot \vec{\omega}) \, \vec{r}^{\,(i)\prime} \right)$$

- α-Komponente:

$$L_{in,\alpha} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime 2} \omega_\alpha - \sum_\beta r_\beta^{(i)\prime} \omega_\beta \, r_\alpha^{(i)\prime} \right)$$

- innerer Drehimpuls:

$$\vec{L}_{in} = \sum_i m_i \, \vec{r}^{\,(i)\prime} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}) = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime 2} \vec{\omega} - (\vec{r}^{\,(i)\prime} \cdot \vec{\omega}) \, \vec{r}^{\,(i)\prime} \right)$$

- α-Komponente:

$$L_{in,\alpha} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime 2} \omega_\alpha - \sum_\beta r_\beta^{(i)\prime} \omega_\beta \, r_\alpha^{(i)\prime} \right)$$

$$= \sum_\beta \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime 2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)\prime} r_\beta^{(i)\prime} \right) \omega_\beta$$

- innerer Drehimpuls:

$$\vec{L}_{in} = \sum_i m_i \, \vec{r}^{\,(i)\prime} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}) = \sum_i m_i \, \left(\vec{r}^{\,(i)\prime 2} \vec{\omega} - (\vec{r}^{\,(i)\prime} \cdot \vec{\omega}) \, \vec{r}^{\,(i)\prime} \right)$$

- α-Komponente:

$$L_{in,\alpha} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime 2} \omega_\alpha - \sum_\beta r_\beta^{(i)\prime} \omega_\beta \, r_\alpha^{(i)\prime} \right)$$

$$= \sum_\beta \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime 2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)\prime} r_\beta^{(i)\prime} \right) \omega_\beta \; = \sum_\beta J_{\alpha\beta} \, \omega_\beta$$

- innerer Drehimpuls:

$$\vec{L}_{in} = \sum_i m_i \, \vec{r}^{\,(i)\prime} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}) = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime 2} \vec{\omega} - (\vec{r}^{\,(i)\prime} \cdot \vec{\omega}) \, \vec{r}^{\,(i)\prime} \right)$$

- α-Komponente:

$$L_{in,\alpha} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime 2} \omega_\alpha - \sum_\beta r_\beta^{(i)\prime} \omega_\beta \, r_\alpha^{(i)\prime} \right)$$

$$= \sum_\beta \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime 2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)\prime} r_\beta^{(i)\prime} \right) \omega_\beta \; = \sum_\beta J_{\alpha\beta} \, \omega_\beta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{L}_{in} = \underline{\underline{J}} \, \vec{\omega}}$$

- innerer Drehimpuls:

$$\vec{L}_{in} = \sum_i m_i \, \vec{r}^{\,(i)\prime} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}) = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime\,2} \vec{\omega} - (\vec{r}^{\,(i)\prime} \cdot \vec{\omega}) \, \vec{r}^{\,(i)\prime} \right)$$

- α-Komponente:

$$L_{in,\alpha} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime\,2} \omega_\alpha - \sum_\beta r_\beta^{(i)\prime} \omega_\beta \, r_\alpha^{(i)\prime} \right)$$

$$= \sum_\beta \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime\,2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)\prime} r_\beta^{(i)\prime} \right) \omega_\beta \; = \sum_\beta J_{\alpha\beta} \, \omega_\beta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{L}_{in} = \underline{\underline{J}} \, \vec{\omega}}$$

- insgesamt (für Ursprung von K' = Schwerpunkt): $\boxed{\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \underline{\underline{J}} \, \vec{\omega}}$

im Folgenden: $\vec{L}_{Bahn} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{L}_{in} = \underline{\underline{J}}\,\vec{\omega}$

im Folgenden: $\vec{L}_{Bahn} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{L}_{in} = \underline{\underline{J}}\,\vec{\omega}$

- Hauptachsensystem: $\begin{pmatrix} L_\xi \\ L_\eta \\ L_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_\xi\,\omega_\xi \\ J_\eta\,\omega_\eta \\ J_\zeta\,\omega_\zeta \end{pmatrix}$

im Folgenden: $\vec{L}_{Bahn} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{L}_{in} = \underline{\underline{J}}\,\vec{\omega}$

- Hauptachsensystem: $\begin{pmatrix} L_\xi \\ L_\eta \\ L_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_\xi\,\omega_\xi \\ J_\eta\,\omega_\eta \\ J_\zeta\,\omega_\zeta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$, falls Drehachse = Hauptachse

Bsp.: $\vec{\omega} = \omega\,\vec{n}_\xi = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \begin{pmatrix} J_\xi\,\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = J_\xi\,\omega\,\vec{n}_\xi$

im Folgenden: $\vec{L}_{Bahn} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{L}_{in} = \underline{\underline{J}}\,\vec{\omega}$

- Hauptachsensystem: $\begin{pmatrix} L_\xi \\ L_\eta \\ L_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_\xi\,\omega_\xi \\ J_\eta\,\omega_\eta \\ J_\zeta\,\omega_\zeta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$, falls Drehachse = Hauptachse

Bsp.: $\vec{\omega} = \omega\,\vec{n}_\xi = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \begin{pmatrix} J_\xi\,\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = J_\xi\,\omega\,\vec{n}_\xi$

- Kugelkreisel: $J_\xi = J_\eta = J_\zeta \equiv J \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{J}} = J\,\mathbb{1}$

$\Rightarrow \quad \vec{L} = J\vec{\omega}$, d.h. $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ gilt immer für Kugelkreisel!

im Folgenden: $\vec{L}_{Bahn} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{L}_{in} = \underline{\underline{J}}\,\vec{\omega}$

- Hauptachsensystem: $\begin{pmatrix} L_\xi \\ L_\eta \\ L_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_\xi\,\omega_\xi \\ J_\eta\,\omega_\eta \\ J_\zeta\,\omega_\zeta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$, falls Drehachse = Hauptachse

Bsp.: $\vec{\omega} = \omega\,\vec{n}_\xi = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \begin{pmatrix} J_\xi\,\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = J_\xi\,\omega\,\vec{n}_\xi$

- Kugelkreisel: $J_\xi = J_\eta = J_\zeta \equiv J \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{J}} = J\,\mathbb{1}$

$\Rightarrow \quad \vec{L} = J\vec{\omega}$, d.h. $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ gilt immer für Kugelkreisel!

Allerdings ist für Kugelkreisel auch jede Achse eine Hauptachse:

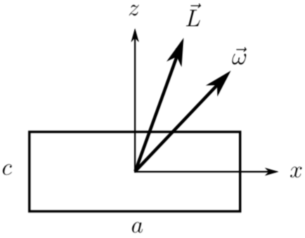
$\underline{\underline{J}}' = \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{D}}^T = \underline{\underline{D}}\,(J\mathbb{1})\,\underline{\underline{D}}^T = J\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{D}}^T = J\mathbb{1} = \underline{\underline{J}}$

Allgemeiner Fall: $\vec{\mathbf{L}} \nparallel \vec{\omega}$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Allgemeiner Fall: $\vec{\mathbf{L}} \nparallel \vec{\omega}$

- **Bsp.:** Quader



Anfangsbedingungen ($t = 0$):

- Hauptträgheitsachsen $\parallel$ zu Achsen von K:

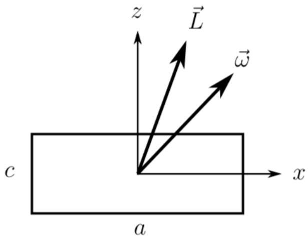
  $\vec{n}_\xi = \vec{e}_x, \ \vec{n}_\eta = \vec{e}_y, \ \vec{n}_\zeta = \vec{e}_z$

- Rotationsachse in der x-z-Ebene: $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{L} = \begin{pmatrix} J_\xi \, \omega_x \\ 0 \\ J_\zeta \, \omega_z \end{pmatrix}, \quad J_\xi = \frac{M}{12}(c^2 + b^2), \quad J_\zeta = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$$

Allgemeiner Fall: $\vec{L} \nparallel \vec{\omega}$

- **Bsp.:** Quader



Anfangsbedingungen ($t = 0$):

- Hauptträgheitsachsen $\parallel$ zu Achsen von K:
  $\vec{n}_\xi = \vec{e}_x, \ \vec{n}_\eta = \vec{e}_y, \ \vec{n}_\zeta = \vec{e}_z$
- Rotationsachse in der x-z-Ebene: $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}$

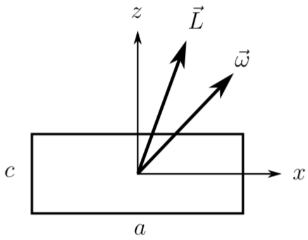
$$\Rightarrow \vec{L} = \begin{pmatrix} J_\xi \, \omega_x \\ 0 \\ J_\zeta \, \omega_z \end{pmatrix}, \quad J_\xi = \tfrac{M}{12}(c^2 + b^2), \quad J_\zeta = \tfrac{M}{12}(a^2 + b^2)$$

- Folge der Rotation: körperfeste Hauptachsen drehen sich von den raumfesten Koordinatenachsen weg $\Rightarrow$ $\underline{\underline{J}}$ ändert sich!

Allgemeiner Fall: $\vec{L} \nparallel \vec{\omega}$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- **Bsp.:** Quader



Anfangsbedingungen ($t = 0$):

- Hauptträgheitsachsen $\parallel$ zu Achsen von K:
  $\vec{n}_\xi = \vec{e}_x, \; \vec{n}_\eta = \vec{e}_y, \; \vec{n}_\zeta = \vec{e}_z$
- Rotationsachse in der x-z-Ebene: $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{L} = \begin{pmatrix} J_\xi \, \omega_x \\ 0 \\ J_\zeta \, \omega_z \end{pmatrix}, \quad J_\xi = \frac{M}{12}(c^2 + b^2), \quad J_\zeta = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$$

- Folge der Rotation: körperfeste Hauptachsen drehen sich von den raumfesten Koordinatenachsen weg $\Rightarrow$ $\underline{\underline{J}}$ ändert sich!

- Fall 1: $\vec{\omega} = const.$ $\Rightarrow$ $\vec{L} = \underline{\underline{J}}\vec{\omega}$ ändert sich
  $\Rightarrow$ äußeres Drehmoment erforderlich

- Fall 2: kein äußeres Drehmoment

  $\Rightarrow \quad \vec{L} = \underline{\underline{J}}\vec{\omega} = const. \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}$ ändert sich! („Nutation")

- Fall 2: kein äußeres Drehmoment

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \underline{\underline{J}}\vec{\omega} = const. \quad \Rightarrow$$ $\vec{\omega}$ ändert sich! („Nutation")

$$\dot{\vec{L}} = \underline{\underline{\dot{J}}}\,\vec{\omega} + \underline{\underline{J}}\,\dot{\vec{\omega}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{\omega}} = -\underline{\underline{J}}^{-1}\,\underline{\underline{\dot{J}}}\,\vec{\omega}$$

- <u>Fall 2:</u> kein äußeres Drehmoment

  $\Rightarrow \quad \vec{L} = \underline{\underline{J}}\vec{\omega} = const. \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}$ ändert sich! („Nutation“)

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\underline{\underline{J}}}\,\vec{\omega} + \underline{\underline{J}}\,\dot{\vec{\omega}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{\omega}} = -\underline{\underline{J}}^{-1}\,\dot{\underline{\underline{J}}}\,\vec{\omega}$$

$\underline{\underline{J}}$ hängt implizit über $\vec{\omega}(t)$ von der Zeit ab.

$\rightarrow$ i.A. komplizierte Bewegung

- <u>Fall 2:</u> kein äußeres Drehmoment

  $\Rightarrow \vec{L} = \underline{\underline{J}}\vec{\omega} = const. \Rightarrow$ $\vec{\omega}$ ändert sich! („Nutation“)

  $$\dot{\vec{L}} = \dot{\underline{\underline{J}}}\,\vec{\omega} + \underline{\underline{J}}\,\dot{\vec{\omega}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{\omega}} = -\underline{\underline{J}}^{-1}\,\dot{\underline{\underline{J}}}\,\vec{\omega}$$

  $\underline{\underline{J}}$ hängt implizit über $\vec{\omega}(t)$ von der Zeit ab.

  → i.A. komplizierte Bewegung

- Symmetrischer Kreisel (z.B. $J_\xi = J_\eta \neq J_\zeta$)

  Bewegungsgleichung analytisch lösbar:

  $\vec{L}$, $\vec{\omega}$ und die ζ-Richtung (“Figurenachse“) liegen stets in einer Ebene, die periodisch um $\vec{L}$ rotiert.

  → „Nutationskegel“