Analogien zwischen Translations- und Rotationsbewegung mit einem Freiheitgrad

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

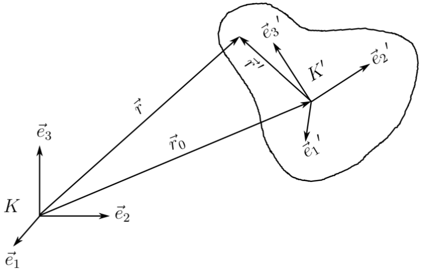
Punktmasse (in einer Dimension)		Rotator mit raumfester Achse	
Ort	x	Drehwinkel	φ
Geschwindigkeit	$v = \dot{x}$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \dot{\varphi}$
Masse	m	Trägheitsmoment	J
Impuls	$p = mv$	Drehimpuls	$L_n = J\omega$
kinetische Energie	$T = \frac{1}{2}mv^2$	kinetische Energie	$T = \frac{1}{2}J\omega^2$
Kraft	F	Drehmoment	N_n
Bewegungsgleichung	$F = \dot{p} = m\ddot{x}$	Bewegungsgleichung	$N_n = \dot{L}_n = J\ddot{\varphi}$

3.3 Kinematik des starren Körpers

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

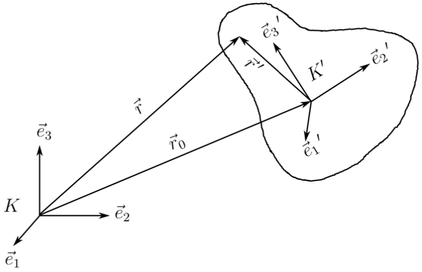
3.3 Kinematik des starren Körpers

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



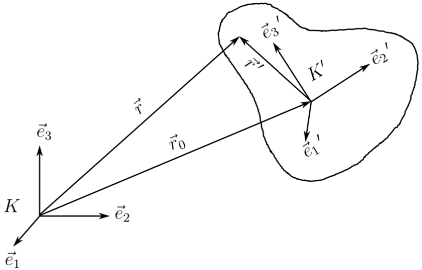
- K: raumfest (Inertialsystem)
- K': körperfest
- $\vec{r}_0$: Ursprung von K' (nicht notw. Schwerpunkt) gemessen in K

3.3 Kinematik des starren Körpers



- K: raumfest (Inertialsystem)
- K': körperfest
- $\vec{r}_0$: Ursprung von K' (nicht notw. Schwerpunkt) gemessen in K
- beliebiger Punkt (nicht notw. $\in$ starrer Körper): $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}\,'(t)$

3.3 Kinematik des starren Körpers



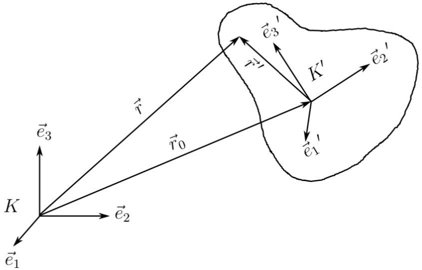
- K: raumfest (Inertialsystem)
- K': körperfest
- $\vec{r}_0$: Ursprung von K' (nicht notw. Schwerpunkt) gemessen in K
- beliebiger Punkt (nicht notw. $\in$ starrer Körper):
  $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}\,'(t)$

- Entwicklung nach Basisvektoren:

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^{3} r_i(t)\,\vec{e}_i, \qquad \vec{r}\,'(t) = \sum_{i=1}^{3} r_i'(t)\,\vec{e}_i{}'(t)$$

3.3 Kinematik des starren Körpers

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

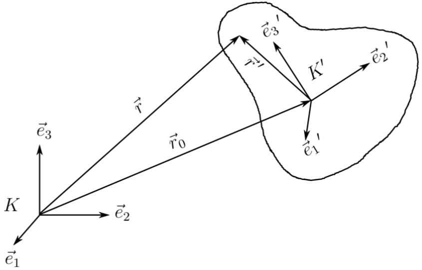


- K: raumfest (Inertialsystem)
- K': körperfest
- $\vec{r}_0$: Ursprung von K' (nicht notw. Schwerpunkt) gemessen in K
- beliebiger Punkt (nicht notw. $\in$ starrer Körper): $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}\,'(t)$

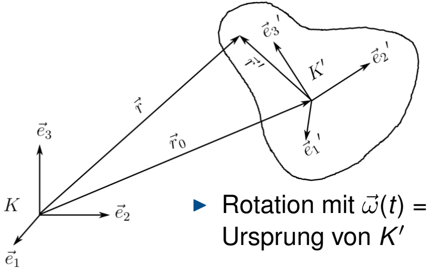
- Entwicklung nach Basisvektoren:

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^{3} r_i(t)\,\vec{e}_i, \qquad \vec{r}\,'(t) = \sum_{i=1}^{3} r_i'(t)\,\vec{e}_i{}'(t)$$

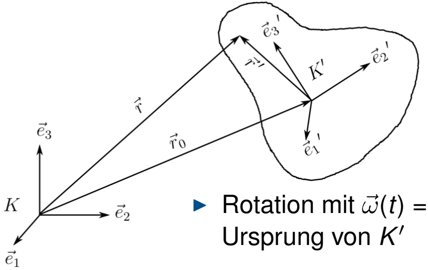
  - $r_i'(t)$: in K' gemessene Koordinaten
  - $\vec{e}_i{}'(t)$ Basisvektoren von K' aus Sicht von K



- $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}\,'(t)$
- $\vec{r}\,'(t) = \sum_{i=1}^{3} r_i'(t)\, \vec{e}_i{}'(t)$

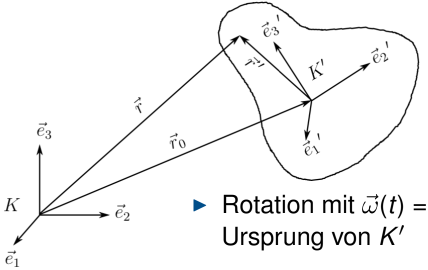


- $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}\,'(t)$
- $\vec{r}\,'(t) = \sum_{i=1}^{3} r_i'(t)\,\vec{e}_i\,'(t)$
- Rotation mit $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{n}(t)$ um eine Achse $\vec{n}(t)$ durch den Ursprung von K' $\quad\Rightarrow\quad \dot{\vec{e}}_i\,' = \vec{\omega} \times \vec{e}_i\,'$



- $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}\,'(t)$
- $\vec{r}\,'(t) = \sum_{i=1}^{3} r_i'(t)\,\vec{e}_i{}'(t)$
- Rotation mit $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{n}(t)$ um eine Achse $\vec{n}(t)$ durch den Ursprung von K' $\quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{e}}_i{}' = \vec{\omega} \times \vec{e}_i{}'$

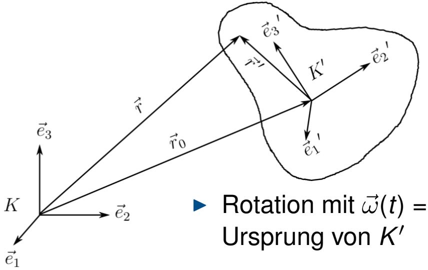
$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}\,' = \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{i=1}^{3} \left(\dot{r}_i'\,\vec{e}_i{}' + r_i'\,\dot{\vec{e}}_i{}' \right) = \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{i=1}^{3} \dot{r}_i'\,\vec{e}_i{}' + \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^{3} r_i'\vec{e}_i{}'$$



- $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}\,'(t)$
- $\vec{r}\,'(t) = \sum_{i=1}^{3} r_i'(t)\,\vec{e}_i{}'(t)$
- Rotation mit $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{n}(t)$ um eine Achse $\vec{n}(t)$ durch den Ursprung von K' $\quad\Rightarrow\quad \dot{\vec{e}}_i{}' = \vec{\omega} \times \vec{e}_i{}'$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}\,' = \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{i=1}^{3}\left(\dot{r}_i'\,\vec{e}_i{}' + r_i'\,\dot{\vec{e}}_i{}'\right) = \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{i=1}^{3}\dot{r}_i'\,\vec{e}_i{}' + \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^{3} r_i'\vec{e}_i{}'$$

$$\equiv \vec{v}_0 + \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

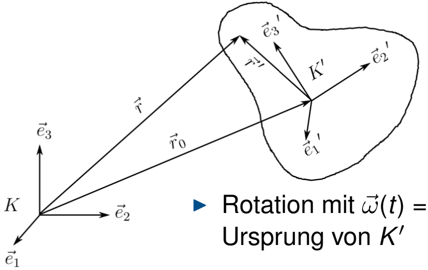


- $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}\,'(t)$
- $\vec{r}\,'(t) = \sum_{i=1}^{3} r_i'(t)\, \vec{e}_i{}'(t)$
- Rotation mit $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{n}(t)$ um eine Achse $\vec{n}(t)$ durch den Ursprung von K' $\quad\Rightarrow\quad \dot{\vec{e}}_i{}' = \vec{\omega} \times \vec{e}_i{}'$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}\,' = \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{i=1}^{3} \left(\dot{r}_i'\, \vec{e}_i{}' + r_i'\, \dot{\vec{e}}_i{}' \right) = \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{i=1}^{3} \dot{r}_i'\, \vec{e}_i{}' + \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^{3} r_i' \vec{e}_i{}'$$

$$\equiv \vec{v}_0 + \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

- $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}_0$: Geschwindigkeit der Translationsbewegung



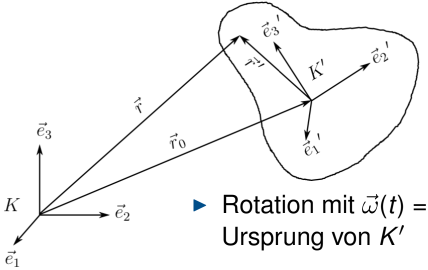
- $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}\,'(t)$
- $\vec{r}\,'(t) = \sum_{i=1}^{3} r_i'(t)\,\vec{e}_i{}'(t)$

- Rotation mit $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{n}(t)$ um eine Achse $\vec{n}(t)$ durch den Ursprung von K' $\quad\Rightarrow\quad \dot{\vec{e}}_i{}' = \vec{\omega} \times \vec{e}_i{}'$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}\,' = \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{i=1}^{3}\left(\dot{r}_i'\,\vec{e}_i{}' + r_i'\,\dot{\vec{e}}_i{}'\right) = \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{i=1}^{3}\dot{r}_i'\,\vec{e}_i{}' + \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^{3} r_i'\vec{e}_i{}'$$

$$\equiv \vec{v}_0 + \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

- $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}_0$: Geschwindigkeit der Translationsbewegung
- $\vec{v}\,' = \sum \dot{r}_i'\,\vec{e}_i{}'$: in K' gemessene Geschwindigkeit des Teilchens



- $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}\,'(t)$
- $\vec{r}\,'(t) = \sum_{i=1}^{3} r_i'(t)\,\vec{e}_i{}'(t)$

- Rotation mit $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{n}(t)$ um eine Achse $\vec{n}(t)$ durch den Ursprung von K' $\quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{e}}_i{}' = \vec{\omega} \times \vec{e}_i{}'$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}\,' = \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{i=1}^{3} \left(\dot{r}_i'\,\vec{e}_i{}' + r_i'\,\dot{\vec{e}}_i{}' \right) = \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{i=1}^{3} \dot{r}_i'\,\vec{e}_i{}' + \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^{3} r_i'\vec{e}_i{}'$$

$$\equiv \vec{v}_0 + \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

- $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}_0$: Geschwindigkeit der Translationsbewegung
- $\vec{v}\,' = \sum \dot{r}_i'\,\vec{e}_i{}'$: in K' gemessene Geschwindigkeit des Teilchens
- $\vec{\omega} \times \vec{r}\,'$: Rotationseffekt

Analoge Rechnung für die Beschleunigung:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \vec{a}_0 + \vec{a}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

Analoge Rechnung für die Beschleunigung:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \vec{a}_0 + \vec{a}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

- $\vec{a}_0 \equiv \ddot{\vec{r}}_0$: Beschleunigung der Translationsbewegung
- $\vec{a}\,' \equiv \sum_{i=1}^{3} \ddot{r}_i' \, \vec{e}_i\,'$: in K' gemessene Beschleunigung des Teilchens

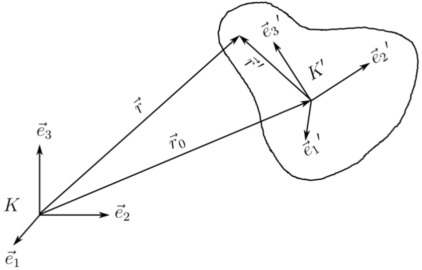
Analoge Rechnung für die Beschleunigung:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \vec{a}_0 + \vec{a}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

- $\vec{a}_0 \equiv \ddot{\vec{r}}_0$: Beschleunigung der Translationsbewegung
- $\vec{a}\,' \equiv \sum_{i=1}^{3} \ddot{r}_i' \, \vec{e}_i\,'$: in K' gemessene Beschleunigung des Teilchens
- $2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$: Coriolis-Beschleunigung
- $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,'$: Effekt durch nicht-konstantes $\vec{\omega}$
- $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$: Zentrifugalbeschleunigung

Geschwindigkeit und Beschleunigung beliebiger Punkte:

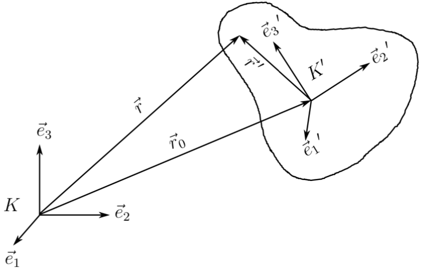
- $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$
- $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \vec{a}_0 + \vec{a}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$



Geschwindigkeit und Beschleunigung beliebiger Punkte:

- $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$
- $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \vec{a}_0 + \vec{a}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$

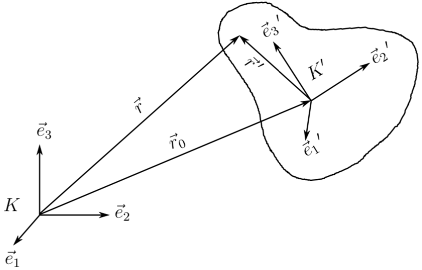
Punkte $\vec{r} = \vec{r}^{\,(i)}$ des starren Körpers selbst: $\vec{v}^{\,(i)\prime} = \vec{a}^{\,(i)\prime} = \vec{0}$



Geschwindigkeit und Beschleunigung beliebiger Punkte:

- $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$
- $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \vec{a}_0 + \vec{a}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$

Punkte $\vec{r} = \vec{r}^{\,(i)}$ des starren Körpers selbst: $\quad \vec{v}^{\,(i)\prime} = \vec{a}^{\,(i)\prime} = \vec{0}$



$$\Rightarrow \quad \vec{v}^{\,(i)} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}$$

$$\vec{a}^{\,(i)} = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}^{\,(i)\prime} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime})$$

3.4 Der Trägheitstensor

3.4 Der Trägheitstensor

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- kinetische Energie des starren Körpers:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \, \vec{v}^{\,(i)2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \, \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2 = T_{trans} + T_{rot} + T_{mix}$$

3.4 Der Trägheitstensor

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- kinetische Energie des starren Körpers:

  $$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, \vec{v}^{\,(i)2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2 = T_{trans} + T_{rot} + T_{mix}$$

  - $T_{trans} = \frac{1}{2} M \vec{v}_0^{\,2}$

3.4 Der Trägheitstensor

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- kinetische Energie des starren Körpers:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \, \vec{v}^{\,(i)2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \, \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2 = T_{trans} + T_{rot} + T_{mix}$$

  - $T_{trans} = \frac{1}{2} M \vec{v}_0^{\,2}$
  - $T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \, \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2$

3.4 Der Trägheitstensor

- kinetische Energie des starren Körpers:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, \vec{v}^{\,(i)2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2 = T_{trans} + T_{rot} + T_{mix}$$

  - $T_{trans} = \frac{1}{2} M \vec{v}_0^{\,2}$
  - $T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2$
  - $T_{mix} = \vec{v}_0 \cdot \left(\vec{\omega} \times \sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)$

3.4 Der Trägheitstensor

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- kinetische Energie des starren Körpers:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, \vec{v}^{\,(i)\,2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2 = T_{trans} + T_{rot} + T_{mix}$$

  - $T_{trans} = \frac{1}{2} M \vec{v}_0^{\,2}$
  - $T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2$
  - $T_{mix} = \vec{v}_0 \cdot \left(\vec{\omega} \times \sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)$ $= 0$, wenn $\vec{r}_0$ = Schwerpunktsvektor

3.4 Der Trägheitstensor

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- kinetische Energie des starren Körpers:

  $$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i\,\vec{v}^{\,(i)^2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\,\left(\vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2 = T_{trans} + T_{rot} + T_{mix}$$

  - $T_{trans} = \frac{1}{2}M\vec{v}_0^{\,2}$
  - $T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\,\left(\vec{\omega}\times\vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2$
  - $T_{mix} = \vec{v}_0\cdot\left(\vec{\omega}\times\sum_i m_i\,\vec{r}^{\,(i)\prime}\right) = 0$, wenn $\vec{r}_0$ = Schwerpunktsvektor
- $(\vec{a}\times\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2}\,\vec{b}^{\,2} - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

3.4 Der Trägheitstensor

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- kinetische Energie des starren Körpers:

  $$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \,\vec{v}^{\,(i)\,2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \,\left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2 = T_{trans} + T_{rot} + T_{mix}$$

  - $T_{trans} = \frac{1}{2} M \vec{v}_0^{\,2}$
  - $T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \,\left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2$
  - $T_{mix} = \vec{v}_0 \cdot \left(\vec{\omega} \times \sum_i m_i \,\vec{r}^{\,(i)\prime}\right) \quad = 0$, wenn $\vec{r}_0$ = Schwerpunktsvektor

- $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2}\,\vec{b}^{\,2} - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

  $$\Rightarrow \quad T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left[\vec{\omega}^{\,2}\,\vec{r}^{\,(i)\prime\,2} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}^{\,(i)\prime})^2\right]$$

3.4 Der Trägheitstensor

- kinetische Energie des starren Körpers:

  $$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i\,\vec{v}^{\,(i)2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\,\left(\vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2 = T_{trans} + T_{rot} + T_{mix}$$

  - $T_{trans} = \frac{1}{2}M\vec{v}_0^2$
  - $T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\,\left(\vec{\omega}\times\vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2$
  - $T_{mix} = \vec{v}_0\cdot\left(\vec{\omega}\times\sum_i m_i\,\vec{r}^{\,(i)\prime}\right)$ $= 0$, wenn $\vec{r}_0$ = Schwerpunktsvektor

- $(\vec{a}\times\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2}\,\vec{b}^{\,2} - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

$$\Rightarrow\quad T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left[\vec{\omega}^{\,2}\,\vec{r}^{\,(i)\prime\,2} - (\vec{\omega}\cdot\vec{r}^{\,(i)\prime})^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i\left[\vec{r}^{\,(i)\prime\,2}\sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha^2 - \sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha\,r_\alpha^{(i)\prime}\sum_{\beta=1}^{3}\omega_\beta\,r_\beta^{(i)\prime}\right]$$

3.4 Der Trägheitstensor

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- kinetische Energie des starren Körpers:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, \vec{v}^{\,(i)\,2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2 = T_{trans} + T_{rot} + T_{mix}$$

  - $T_{trans} = \frac{1}{2}M\vec{v}_0^2$
  - $T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, \left(\vec{\omega}\times\vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2$
  - $T_{mix} = \vec{v}_0 \cdot \left(\vec{\omega}\times\sum_i m_i\,\vec{r}^{\,(i)\prime}\right)$ = 0, wenn $\vec{r}_0$ = Schwerpunktsvektor

- $(\vec{a}\times\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2}\,\vec{b}^{\,2} - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

$$\Rightarrow \quad T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left[\vec{\omega}^{\,2}\,\vec{r}^{\,(i)\prime\,2} - (\vec{\omega}\cdot\vec{r}^{\,(i)\prime})^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i\left[\vec{r}^{\,(i)\prime\,2}\sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha^2 - \sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha\, r_\alpha^{(i)\prime}\sum_{\beta=1}^{3}\omega_\beta\, r_\beta^{(i)\prime}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\left[\sum_i m_i\left(\vec{r}^{\,(i)\prime\,2}\delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)\prime}r_\beta^{(i)\prime}\right)\right]\omega_\alpha\omega_\beta$$

3.4 Der Trägheitstensor

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- kinetische Energie des starren Körpers:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \, \vec{v}^{\,(i)^2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \, \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2 = T_{trans} + T_{rot} + T_{mix}$$

  - $T_{trans} = \frac{1}{2} M \vec{v}_0^{\,2}$
  - $T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \, \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2$
  - $T_{mix} = \vec{v}_0 \cdot \left(\vec{\omega} \times \sum_i m_i \, \vec{r}^{\,(i)\prime}\right) \quad = 0$, wenn $\vec{r}_0$ = Schwerpunktsvektor

- $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2}\,\vec{b}^{\,2} - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

$$\Rightarrow \quad T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left[\vec{\omega}^{\,2}\,\vec{r}^{\,(i)\prime\,2} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}^{\,(i)\prime})^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left[\vec{r}^{\,(i)\prime\,2} \sum_{\alpha=1}^{3} \omega_\alpha^2 - \sum_{\alpha=1}^{3} \omega_\alpha \, r_\alpha^{(i)\prime} \sum_{\beta=1}^{3} \omega_\beta \, r_\beta^{(i)\prime}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \left[\sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime\,2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)\prime} r_\beta^{(i)\prime}\right)\right] \omega_\alpha \omega_\beta \quad \equiv \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J_{\alpha\beta} \, \omega_\alpha \omega_\beta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J_{\alpha\beta}\, \omega_\alpha \omega_\beta} \quad \text{mit} \quad J_{\alpha\beta} \equiv \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime\, 2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)\prime} r_\beta^{(i)\prime} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J_{\alpha\beta}\, \omega_\alpha \omega_\beta} \quad \text{mit} \quad J_{\alpha\beta} \equiv \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime\, 2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)\prime} r_\beta^{(i)\prime} \right)$$

- $\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}$ Trägheitstensor

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J_{\alpha\beta}\,\omega_\alpha\omega_\beta} \quad \text{mit} \quad J_{\alpha\beta} \equiv \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime\,2}\delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)\prime} r_\beta^{(i)\prime}\right)$$

- $\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}$ Trägheitstensor

$$\Rightarrow \quad T_{rot} = \tfrac{1}{2}\vec{\omega}^{\,T}\underline{\underline{J}}\,\vec{\omega}, \qquad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega}^{\,T} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J_{\alpha\beta}\,\omega_\alpha\omega_\beta} \quad \text{mit} \quad J_{\alpha\beta} \equiv \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime\,2}\delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)\prime} r_\beta^{(i)\prime}\right)$$

- $\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}$ Trägheitstensor

$$\Rightarrow \quad T_{rot} = \tfrac{1}{2}\vec{\omega}^{\,T}\underline{\underline{J}}\,\vec{\omega}, \qquad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega}^{\,T} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

- kontinuierliche Dichteverteilung: $J_{\alpha\beta} = \int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\left(\vec{r}\,'^{\,2}\delta_{\alpha\beta} - r'_\alpha r'_\beta\right)$

Eigenschaften des Trägheitstensors

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- symmetrisch: $J_{\alpha\beta} = J_{\beta\alpha} \quad \Rightarrow$ 6 unabhängige Komponenten

Eigenschaften des Trägheitstensors

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- symmetrisch: $J_{\alpha\beta} = J_{\beta\alpha} \quad \Rightarrow$ 6 unabhängige Komponenten
- Rotation um die α-Achse: $\omega_\beta = \omega\,\delta_{\beta\alpha} = \begin{cases} \omega & \text{falls} \quad \beta = \alpha \\ 0 & \text{„} \quad \beta \neq \alpha \end{cases}$

(z.B. $\alpha = 3 \;\Rightarrow\; \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$)

$\Rightarrow \quad T_{rot} = \frac{1}{2} J_{\alpha\alpha}\,\omega^2 \quad \rightarrow \quad J_{\alpha\alpha}$ = Trägheitsmoment für die α-Achse

Eigenschaften des Trägheitstensors

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- symmetrisch: $J_{\alpha\beta} = J_{\beta\alpha} \quad \Rightarrow$ 6 unabhängige Komponenten
- Rotation um die α-Achse: $\omega_\beta = \omega\,\delta_{\beta\alpha} = \begin{cases} \omega & \text{falls} \quad \beta = \alpha \\ 0 & \text{"} \quad \beta \neq \alpha \end{cases}$

(z.B. $\alpha = 3 \;\Rightarrow\; \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$)

$\Rightarrow \quad T_{rot} = \frac{1}{2} J_{\alpha\alpha}\,\omega^2 \quad$ → $J_{\alpha\alpha}$ = Trägheitsmoment für die α-Achse

- Rotation mit $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$ um eine beliebige Achse $\vec{n}$:

$$\Rightarrow \quad T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J_{\alpha\beta}\, n_\alpha n_\beta\, \omega^2 \equiv \frac{1}{2} J_{\vec{n}}\, \omega^2$$

→ Tägheitsmoment für die $\vec{n}$-Richtung: $\quad J_{\vec{n}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J_{\alpha\beta}\, n_\alpha n_\beta$

Eigenschaften des Trägheitstensors

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- symmetrisch: $J_{\alpha\beta} = J_{\beta\alpha} \quad \Rightarrow$ 6 unabhängige Komponenten
- Rotation um die α-Achse: $\omega_\beta = \omega\,\delta_{\beta\alpha} = \begin{cases} \omega & \text{falls} \quad \beta = \alpha \\ 0 & \text{"} \quad \beta \neq \alpha \end{cases}$

  (z.B. $\alpha = 3 \;\Rightarrow\; \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$)

  $\Rightarrow \quad T_{rot} = \frac{1}{2} J_{\alpha\alpha}\,\omega^2$ ➞ $J_{\alpha\alpha}$ = Trägheitsmoment für die α-Achse

- Rotation mit $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$ um eine beliebige Achse $\vec{n}$:

  $$\Rightarrow \quad T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J_{\alpha\beta}\, n_\alpha n_\beta\, \omega^2 \equiv \frac{1}{2} J_{\vec{n}}\, \omega^2$$

  ➞ Tägheitsmoment für die $\vec{n}$-Richtung: $J_{\vec{n}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J_{\alpha\beta}\, n_\alpha n_\beta$

  ➞ Die 6 $J_{\alpha\beta}$ enthalten die Informationen für unendlich viele Dreh-Richtungen!

Skalare, Vektoren und Tensoren

Skalare, Vektoren und Tensoren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Transformation des Ortsvektors bei Drehung des Koordinatensystems:

$$\vec{r}\,' = \underline{\underline{D}}\,\vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad r_i' = \sum_{j=1}^{3} D_{ij}\, r_j, \qquad \underline{\underline{D}} = \text{Drehmatrix}$$

Skalare, Vektoren und Tensoren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Transformation des Ortsvektors bei Drehung des Koordinatensystems:

$$\vec{r}\,' = \underline{\underline{D}}\,\vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad r_i' = \sum_{j=1}^{3} D_{ij}\, r_j, \qquad \underline{\underline{D}} = \text{Drehmatrix}$$

z.B. Drehung um die z-Achse: $\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Skalare, Vektoren und Tensoren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Transformation des Ortsvektors bei Drehung des Koordinatensystems:

$$\vec{r}\,' = \underline{\underline{D}}\,\vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad r_i' = \sum_{j=1}^{3} D_{ij}\, r_j, \qquad \underline{\underline{D}} = \text{Drehmatrix}$$

Invarianz der Länge: $\vec{r}\,'^2 = \sum_i r_i' r_i' = \sum_{i,j,k} D_{ij} D_{ik} r_j r_k \stackrel{!}{=} \vec{r}^{\,2} = \sum_j r_j r_j = \sum_{j,k} \delta_{jk} r_j r_k$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{3} D_{ij}\, D_{ik} = \delta_{jk} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{D}} = \mathbb{1} \qquad (\underline{\underline{D}} = \text{„orthogonale Matrix“})$$

Skalare, Vektoren und Tensoren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Transformation des Ortsvektors bei Drehung des Koordinatensystems:

$$\vec{r}\,' = \underline{\underline{D}}\,\vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad r_i' = \sum_{j=1}^{3} D_{ij}\, r_j, \qquad \underline{\underline{D}} = \text{Drehmatrix}$$

Invarianz der Länge: $\vec{r}\,'^2 = \sum_i r_i' r_i' = \sum_{i,j,k} D_{ij} D_{ik} r_j r_k \stackrel{!}{=} \vec{r}^{\,2} = \sum_j r_j r_j = \sum_{j,k} \delta_{jk} r_j r_k$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{3} D_{ij}\, D_{ik} = \delta_{jk} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{D}} = \mathbb{1} \qquad (\underline{\underline{D}} = \text{„orthogonale Matrix“})$$

- Skalare (= Tensoren 0. Stufe): $S' = S$, d.h. invariant unter Drehungen

Skalare, Vektoren und Tensoren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Transformation des Ortsvektors bei Drehung des Koordinatensystems:

$$\vec{r}\,' = \underline{\underline{D}}\,\vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad r_i' = \sum_{j=1}^{3} D_{ij}\, r_j, \qquad \underline{\underline{D}} = \text{Drehmatrix}$$

Invarianz der Länge: $\vec{r}\,'^2 = \sum_i r_i' r_i' = \sum_{i,j,k} D_{ij} D_{ik} r_j r_k \stackrel{!}{=} \vec{r}^{\,2} = \sum_j r_j r_j = \sum_{j,k} \delta_{jk} r_j r_k$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{3} D_{ij}\, D_{ik} = \delta_{jk} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{D}} = \mathbb{1} \qquad (\underline{\underline{D}} = \text{„orthogonale Matrix“})$$

- Skalare (= Tensoren 0. Stufe): $S' = S$, d.h. invariant unter Drehungen
- Vektoren (= Tensoren 1. Stufe)

  = 3-komponentige Größen, die sich wie $\vec{r}$ transformieren: $V_i' = \sum_{j=1}^{3} D_{ij}\, V_j$

  $(\Leftrightarrow \;\; \vec{V}\,' = \underline{\underline{D}}\,\vec{V})$

Skalare, Vektoren und Tensoren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Transformation des Ortsvektors bei Drehung des Koordinatensystems:

$$\vec{r}\,' = \underline{\underline{D}}\,\vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad r_i' = \sum_{j=1}^{3} D_{ij}\, r_j, \qquad \underline{\underline{D}} = \text{Drehmatrix}$$

Invarianz der Länge: $\vec{r}\,'^2 = \sum_i r_i' r_i' = \sum_{i,j,k} D_{ij} D_{ik} r_j r_k \stackrel{!}{=} \vec{r}\,^2 = \sum_j r_j r_j = \sum_{j,k} \delta_{jk} r_j r_k$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{3} D_{ij}\, D_{ik} = \delta_{jk} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{D}} = \mathbb{1} \qquad (\underline{\underline{D}} = \text{„orthogonale Matrix“})$$

- Skalare (= Tensoren 0. Stufe): $S' = S$, d.h. invariant unter Drehungen
- Vektoren (= Tensoren 1. Stufe)

  = 3-komponentige Größen, die sich wie $\vec{r}$ transformieren: $V_i' = \sum_{j=1}^{3} D_{ij}\, V_j$

  $(\Leftrightarrow \; \vec{V}\,' = \underline{\underline{D}}\,\vec{V})$
- Tensoren 2. Stufe

  = 3×3-Matrizen $\underline{\underline{A}}$ mit $A_{ij}' = \sum_{m,n=1}^{3} D_{im}\, D_{jn}\, A_{mn} \quad (\Leftrightarrow \; \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{DAD}}^T)$

- Man kann zeigen:
  - Der Trägheitstensor $\underline{\underline{J}}$ ist ein Tensor 2. Stufe.
  - $\vec{\omega}$ ist ein Vektor (da $\vec{n}$ ein Vektor ist)

- Man kann zeigen:
  - Der Trägheitstensor $\underline{\underline{J}}$ ist ein Tensor 2. Stufe.
  - $\vec{\omega}$ ist ein Vektor (da $\vec{n}$ ein Vektor ist)

$$\Rightarrow \quad T'_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J'_{\alpha\beta}\, \omega'_{\alpha} \omega'_{\beta}$$

- Man kann zeigen:
  - Der Trägheitstensor $\underline{\underline{J}}$ ist ein Tensor 2. Stufe.
  - $\vec{\omega}$ ist ein Vektor (da $\vec{n}$ ein Vektor ist)

$$\Rightarrow \quad T'_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J'_{\alpha\beta}\, \omega'_\alpha \omega'_\beta$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{ij} D_{\alpha i}\, D_{\beta j}\, J_{ij} \sum_m D_{\alpha m}\, \omega_m \sum_n D_{\beta n}\, \omega_n$$

- Man kann zeigen:
  - Der Trägheitstensor $\underline{\underline{J}}$ ist ein Tensor 2. Stufe.
  - $\vec{\omega}$ ist ein Vektor (da $\vec{n}$ ein Vektor ist)

$$\Rightarrow \quad T'_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J'_{\alpha\beta}\, \omega'_\alpha \omega'_\beta$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{ij} D_{\alpha i}\, D_{\beta j}\, J_{ij} \sum_m D_{\alpha m}\, \omega_m \sum_n D_{\beta n}\, \omega_n$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j,m,n} \Big(\sum_\alpha D_{\alpha i}\, D_{\alpha m} \Big) \Big(\sum_\beta D_{\beta j}\, D_{\beta n} \Big) J_{ij}\, \omega_m\, \omega_n$$

- Man kann zeigen:
  - Der Trägheitstensor $\underline{\underline{J}}$ ist ein Tensor 2. Stufe.
  - $\vec{\omega}$ ist ein Vektor (da $\vec{n}$ ein Vektor ist)

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad T'_{rot} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J'_{\alpha\beta}\, \omega'_\alpha \omega'_\beta \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{ij} D_{\alpha i}\, D_{\beta j}\, J_{ij} \sum_{m} D_{\alpha m}\, \omega_m \sum_{n} D_{\beta n}\, \omega_n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j,m,n} \Big(\sum_{\alpha} D_{\alpha i}\, D_{\alpha m} \Big) \Big(\sum_{\beta} D_{\beta j}\, D_{\beta n} \Big) J_{ij}\, \omega_m\, \omega_n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j,m,n} \delta_{im}\, \delta_{jn}\, J_{ij}\, \omega_m\, \omega_n
\end{aligned}
$$

- Man kann zeigen:
  - Der Trägheitstensor $\underline{\underline{J}}$ ist ein Tensor 2. Stufe.
  - $\vec{\omega}$ ist ein Vektor (da $\vec{n}$ ein Vektor ist)

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad T'_{rot} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J'_{\alpha\beta}\, \omega'_\alpha \omega'_\beta \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{ij} D_{\alpha i}\, D_{\beta j}\, J_{ij} \sum_m D_{\alpha m}\, \omega_m \sum_n D_{\beta n}\, \omega_n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j,m,n} \Big(\sum_\alpha D_{\alpha i}\, D_{\alpha m} \Big) \Big(\sum_\beta D_{\beta j}\, D_{\beta n} \Big) J_{ij}\, \omega_m\, \omega_n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j,m,n} \delta_{im}\, \delta_{jn}\, J_{ij}\, \omega_m\, \omega_n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij}\, \omega_i\, \omega_j
\end{aligned}
$$

- Man kann zeigen:
  - Der Trägheitstensor $\underline{\underline{J}}$ ist ein Tensor 2. Stufe.
  - $\vec{\omega}$ ist ein Vektor (da $\vec{n}$ ein Vektor ist)

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad T'_{rot} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J'_{\alpha\beta}\, \omega'_\alpha \omega'_\beta \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{ij} D_{\alpha i}\, D_{\beta j}\, J_{ij} \sum_m D_{\alpha m}\, \omega_m \sum_n D_{\beta n}\, \omega_n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j,m,n} \Big(\sum_\alpha D_{\alpha i}\, D_{\alpha m} \Big) \Big(\sum_\beta D_{\beta j}\, D_{\beta n} \Big) J_{ij}\, \omega_m\, \omega_n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j,m,n} \delta_{im}\, \delta_{jn}\, J_{ij}\, \omega_m\, \omega_n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij}\, \omega_i\, \omega_j \;=\; T_{rot}
\end{aligned}
$$

$\longrightarrow$ Skalar, d.h. invariant unter Drehungen des Koordinatensystems!