Rotationsenergie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- keine Translation $\Rightarrow$ $T_{rot} = T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}^{(i)2}$

Rotationsenergie

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- keine Translation $\Rightarrow$ $T_{rot} = T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}^{(i)\,2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{(i)}\right)^2 \omega^2$

Rotationsenergie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- keine Translation $\Rightarrow \; T_{rot} = T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}^{(i)\,2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{(i)}\right)^2 \omega^2$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2} \quad \text{mit} \quad J \equiv \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{(i)}\right)^2$$

Trägheitsmoment (bzgl. der gegebenen Drehachse)

Rotationsenergie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- keine Translation $\Rightarrow\; T_{rot} = T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}^{(i)\,2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)}\right)^2 \omega^2$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2} \quad \text{mit} \quad J \equiv \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)}\right)^2$$

Trägheitsmoment (bzgl. der gegebenen Drehachse)

- kontinuierliche Massenverteilung: $J = \int d^3r\, \rho(\vec{r}) \left(\vec{n} \times \vec{r}\right)^2$

Rotationsenergie

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- keine Translation $\Rightarrow$ $T_{rot} = T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}^{(i)\,2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)}\right)^2 \omega^2$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2} \quad \text{mit} \quad J \equiv \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)}\right)^2$$

Trägheitsmoment (bzgl. der gegebenen Drehachse)

- kontinuierliche Massenverteilung: $J = \int d^3r \, \rho(\vec{r}) \left(\vec{n} \times \vec{r}\right)^2$
- externe konservative Kräfte $\rightarrow$ $V(\varphi)$

$$\Rightarrow \quad E = T_{rot} + V = \tfrac{1}{2} J \omega^2 + V = \tfrac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) = const.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{\tfrac{2}{J} \left(E - V(\varphi)\right)}$$

Rotationsenergie

- keine Translation $\Rightarrow$ $T_{rot} = T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}^{(i)\,2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\vec{n}\times\vec{r}^{(i)}\right)^2 \omega^2$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2} \quad \text{mit} \quad J \equiv \sum_i m_i \left(\vec{n}\times\vec{r}^{(i)}\right)^2$$

Trägheitsmoment (bzgl. der gegebenen Drehachse)

- kontinuierliche Massenverteilung: $J = \int d^3r\, \rho(\vec{r}) \left(\vec{n}\times\vec{r}\right)^2$
- externe konservative Kräfte $\rightarrow$ $V(\varphi)$

$$\Rightarrow \quad E = T_{rot} + V = \tfrac{1}{2} J\omega^2 + V = \tfrac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) = const.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dt} = \pm\sqrt{\tfrac{2}{J}\left(E - V(\varphi)\right)}$$

$$\Rightarrow \quad t(\varphi) - t(\varphi_0) = \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{\frac{2}{J}(E - V(\varphi'))}} \quad \xrightarrow{\text{Umkehrung}} \quad \varphi(t)$$

Drehimpuls

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}^{\,(i)} \times m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)}\right)$$

Drehimpuls

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}^{\,(i)} \times m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)}\right)$$

doppeltes Kreuzprodukt: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

Drehimpuls

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}^{\,(i)} \times m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)} \right)$$

doppeltes Kreuzprodukt: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)2} \vec{\omega} - (\vec{r}^{\,(i)} \cdot \vec{\omega})\, \vec{r}^{\,(i)} \right)$$

Drehimpuls

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}^{\,(i)} \times m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)}\right)$$

doppeltes Kreuzprodukt: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)2}\vec{\omega} - (\vec{r}^{\,(i)} \cdot \vec{\omega})\,\vec{r}^{\,(i)}\right)$$

$\uparrow$

$\vec{L}$ ist i.A. nicht parallel zu $\vec{\omega}$!

Drehimpuls

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}^{\,(i)} \times m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)}\right)$$

doppeltes Kreuzprodukt: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)2} \vec{\omega} - (\vec{r}^{\,(i)} \cdot \vec{\omega})\, \vec{r}^{\,(i)}\right)$$

$\uparrow$

$\vec{L}$ ist i.A. nicht parallel zu $\vec{\omega}$!

$\Rightarrow$ $\vec{L}$ ändert während der Rotation i.A. seine Richtung.

Drehimpuls

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}^{\,(i)} \times m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)}\right)$$

doppeltes Kreuzprodukt: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)2} \vec{\omega} - (\vec{r}^{\,(i)} \cdot \vec{\omega})\, \vec{r}^{\,(i)}\right)$$

$\uparrow$

$\vec{L}$ ist i.A. nicht parallel zu $\vec{\omega}$!

$\Rightarrow$ $\vec{L}$ ändert während der Rotation i.A. seine Richtung.

$\Rightarrow$ Die Befestigung der Drehachse übt i.A. ein Drehmoment aus.

Drehimpuls

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}^{\,(i)} \times m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)}\right)$$

doppeltes Kreuzprodukt: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)2} \vec{\omega} - (\vec{r}^{\,(i)} \cdot \vec{\omega})\, \vec{r}^{\,(i)}\right)$$

$\uparrow$

$\vec{L}$ ist i.A. nicht parallel zu $\vec{\omega}$!

$\Rightarrow$ $\vec{L}$ ändert während der Rotation i.A. seine Richtung.

$\Rightarrow$ Die Befestigung der Drehachse übt i.A. ein Drehmoment aus.

(umgekehrt:
kein Drehmoment $\Rightarrow \vec{L} = const. \stackrel{\text{i.A.}}{\Rightarrow}$ Drehachse ändert sich, s. später)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Drehimpulsänderung insgesamt: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_{ex} = \sum_i \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}_{ex}^{(i)}$

$\vec{F}_{ex}^{(i)} = \vec{F}_{Z}^{(i)} + \vec{F}_{\text{frei}}^{(i)}$

  - $\vec{F}_{Z}^{(i)}$: „Zwangskräfte“, die die einzelnen Teilchen in konstantem Abstand von der Drehachse halten
  - $\vec{F}_{\text{frei}}^{(i)}$: „freie Kräfte“, z.B. Schwerkraft

- Drehimpulsänderung insgesamt: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_{ex} = \sum_i \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}_{ex}^{(i)}$

  $\vec{F}_{ex}^{(i)} = \vec{F}_Z^{(i)} + \vec{F}_{\text{frei}}^{(i)}$
  - $\vec{F}_Z^{(i)}$: „Zwangskräfte“, die die einzelnen Teilchen in konstantem Abstand von der Drehachse halten
  - $\vec{F}_{\text{frei}}^{(i)}$: „freie Kräfte“, z.B. Schwerkraft
- Problem: $\vec{F}_Z^{(i)}$ nicht von vornherein bekannt (➞ Kap. 4, Lagrange-Mechanik)

- Drehimpulsänderung insgesamt: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_{ex} = \sum_i \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}_{ex}^{(i)}$

  $\vec{F}_{ex}^{(i)} = \vec{F}_Z^{(i)} + \vec{F}_{\text{frei}}^{(i)}$
  - $\vec{F}_Z^{(i)}$: „Zwangskräfte", die die einzelnen Teilchen in konstantem Abstand von der Drehachse halten
  - $\vec{F}_{\text{frei}}^{(i)}$: „freie Kräfte", z.B. Schwerkraft
- Problem: $\vec{F}_Z^{(i)}$ nicht von vornherein bekannt (→ Kap. 4, Lagrange-Mechanik)
- Betrachte $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$

  $\vec{F}_Z^{(i)}$ = Zentripetalkraft zur Achse hin $= -F_Z^{(i)} \vec{e}_\rho$

- Drehimpulsänderung insgesamt: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_{ex} = \sum_i \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}_{ex}^{\,(i)}$

$\vec{F}_{ex}^{\,(i)} = \vec{F}_Z^{\,(i)} + \vec{F}_{\text{frei}}^{\,(i)}$

  - $\vec{F}_Z^{\,(i)}$: „Zwangskräfte", die die einzelnen Teilchen in konstantem Abstand von der Drehachse halten
  - $\vec{F}_{\text{frei}}^{\,(i)}$: „freie Kräfte", z.B. Schwerkraft

- Problem: $\vec{F}_Z^{\,(i)}$ nicht von vornherein bekannt (➞ Kap. 4, Lagrange-Mechanik)
- Betrachte $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$

$\vec{F}_Z^{\,(i)}$ = Zentripetalkraft zur Achse hin $= -F_Z^{(i)} \vec{e}_\rho$

$\Rightarrow \; \vec{N}_Z^{\,(i)} = \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}_Z^{\,(i)} = -\rho^{(i)} F_Z^{(i)}\, \vec{e}_\rho \times \vec{e}_\rho - z^{(i)} F_Z^{(i)}\, \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = -z^{(i)} F_Z^{(i)}\, \vec{e}_\varphi$

- Drehimpulsänderung insgesamt: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_{ex} = \sum_i \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}_{ex}^{(i)}$

$\vec{F}_{ex}^{(i)} = \vec{F}_Z^{(i)} + \vec{F}_{\text{frei}}^{(i)}$

  - $\vec{F}_Z^{(i)}$: „Zwangskräfte“, die die einzelnen Teilchen in konstantem Abstand von der Drehachse halten
  - $\vec{F}_{\text{frei}}^{(i)}$: „freie Kräfte“, z.B. Schwerkraft

- Problem: $\vec{F}_Z^{(i)}$ nicht von vornherein bekannt (➞ Kap. 4, Lagrange-Mechanik)
- Betrachte $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$

$\vec{F}_Z^{(i)}$ = Zentripetalkraft zur Achse hin $= -F_Z^{(i)} \vec{e}_\rho$

$$\Rightarrow \vec{N}_Z^{(i)} = \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}_Z^{(i)} = -\rho^{(i)} F_Z^{(i)}\, \vec{e}_\rho \times \vec{e}_\rho - z^{(i)} F_Z^{(i)}\, \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = -z^{(i)} F_Z^{(i)}\, \vec{e}_\varphi$$

$\Rightarrow \vec{N}_Z^{(i)} \perp \vec{\omega} \Rightarrow \vec{N}_Z = \sum N_Z^{(i)} \perp \vec{\omega}$ keine Komponente entlang der Achse!

→ Betrachte nur die Komponente von $\vec{L}$ in Achsenrichtung:

$$L_n = \vec{L} \cdot \vec{n} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)} \times \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \right) \cdot \vec{n} = \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)} \right) \cdot \dot{\vec{r}}^{\,(i)}$$

→ Betrachte nur die Komponente von $\vec{L}$ in Achsenrichtung:

$$
\begin{aligned}
L_n = \vec{L} \cdot \vec{n} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)} \times \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \right) \cdot \vec{n} = \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)} \right) \cdot \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \\
= \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)} \right) \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)} \right) \\
= \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)} \right)^2 \omega
\end{aligned}
$$

→ Betrachte nur die Komponente von $\vec{L}$ in Achsenrichtung:

$$L_n = \vec{L} \cdot \vec{n} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)} \times \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \right) \cdot \vec{n} = \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)} \right) \cdot \dot{\vec{r}}^{\,(i)}$$

$$= \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)} \right) \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)} \right)$$

$$= \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)} \right)^2 \omega$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_n = J\omega = J\dot{\varphi}}$$

→ Betrachte nur die Komponente von $\vec{L}$ in Achsenrichtung:

$$L_n = \vec{L} \cdot \vec{n} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)} \times \dot{\vec{r}}^{\,(i)}\right) \cdot \vec{n} = \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)}\right) \cdot \dot{\vec{r}}^{\,(i)}$$

$$= \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)}\right) \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)}\right)$$

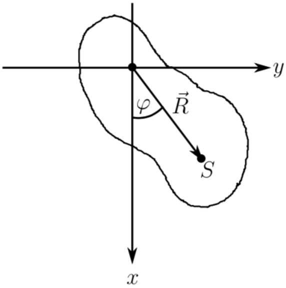
$$= \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)}\right)^2 \omega$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_n = J\omega = J\dot{\varphi}}$$

- $\frac{dL_n}{dt} = J\ddot{\varphi} = N_{ex,n} = \sum_i \left(\vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}_{ex}^{(i)}\right) \cdot \vec{n} = \sum_i \left(\vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}_{\text{frei}}^{(i)}\right) \cdot \vec{n}$

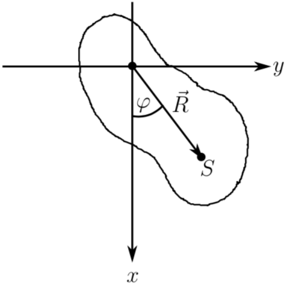
  Nur die Drehmomente durch die freien Kräfte müssen berücksichtigt werden.

Beispiel: Physikalisches Pendel



- Drehachse = z-Achse
- externe Kräfte (= Schwerkraft): $\vec{F}_{ex}^{(i)} = m_i g \, \vec{e}_x$

Beispiel: Physikalisches Pendel



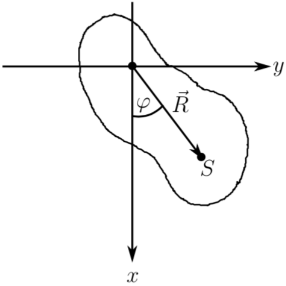
- Drehachse = z-Achse
- externe Kräfte (= Schwerkraft): $\vec{F}_{ex}^{(i)} = m_i g \, \vec{e}_x$

$$\Rightarrow N_{ex,n} = \Big(\sum_i \vec{r}^{(i)} \times m_i g \, \vec{e}_x \Big) \cdot \vec{e}_z$$

$$= \sum_i m_i g \, \underbrace{(\vec{e}_x \times \vec{e}_z)}_{=-\vec{e}_y} \cdot \vec{r}^{(i)} = -\sum_i m_i g \, y^{(i)}$$

Beispiel: Physikalisches Pendel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- Drehachse = z-Achse
- externe Kräfte (= Schwerkraft): $\vec{F}_{ex}^{(i)} = m_i g\, \vec{e}_x$

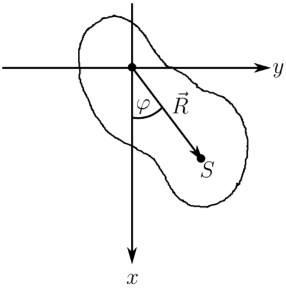
$\Rightarrow$ $$N_{ex,n} = \Big(\sum_i \vec{r}^{(i)} \times m_i g\, \vec{e}_x\Big) \cdot \vec{e}_z$$

$$= \sum_i m_i g\, \underbrace{(\vec{e}_x \times \vec{e}_z)}_{=-\vec{e}_y} \cdot \vec{r}^{(i)} = -\sum_i m_i g\, y^{(i)}$$

- Schwerpunktsvektor: $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)}$

$\Rightarrow$ $N_{ex,n} = -MgR_y$

Beispiel: Physikalisches Pendel



- Drehachse = z-Achse
- externe Kräfte (= Schwerkraft): $\vec{F}_{ex}^{(i)} = m_i g\, \vec{e}_x$

$$\Rightarrow\quad N_{ex,n} = \Big(\sum_i \vec{r}^{(i)} \times m_i g\, \vec{e}_x\Big) \cdot \vec{e}_z$$

$$= \sum_i m_i g\, \underbrace{(\vec{e}_x \times \vec{e}_z)}_{=-\vec{e}_y} \cdot \vec{r}^{(i)} = -\sum_i m_i g\, y^{(i)}$$

- Schwerpunktsvektor: $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)}$

$$\Rightarrow\quad N_{ex,n} = -MgR_y$$

- Wähle Schwerpunkt in xy-Ebene: $\vec{R} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\quad J\ddot{\varphi} = -MgR\sin\varphi \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{MgR}{J}\sin\varphi = 0}$$

Alternative Herleitung über den Energiesatz:

- $V = \sum_i V^{(i)} = -\sum_i m_i g\, x^{(i)} = -MgR_x = -MgR\cos\varphi$
- $T = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$

$\Rightarrow$ $E = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 - MgR\cos\varphi = const.$

Alternative Herleitung über den Energiesatz:

- $V = \sum_i V^{(i)} = -\sum_i m_i g\, x^{(i)} = -MgR_x = -MgR\cos\varphi$
- $T = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$

$\Rightarrow$ $E = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 - MgR\cos\varphi = const.$

$\Rightarrow$ $\frac{dE}{dt} = J\dot{\varphi}\,\ddot{\varphi} + MgR\sin\varphi\;\dot{\varphi} = (J\ddot{\varphi} + MgR\sin\varphi)\,\dot{\varphi} = 0$

Alternative Herleitung über den Energiesatz:

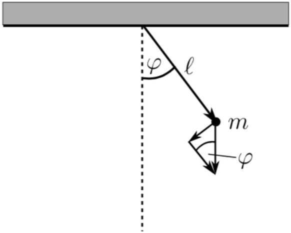
- $V = \sum_i V^{(i)} = -\sum_i m_i g\, x^{(i)} = -MgR_x = -MgR\cos\varphi$
- $T = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$

$\Rightarrow$ $E = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 - MgR\cos\varphi = const.$

$\Rightarrow$ $\frac{dE}{dt} = J\dot{\varphi}\,\ddot{\varphi} + MgR\sin\varphi\;\dot{\varphi} = (J\ddot{\varphi} + MgR\sin\varphi)\,\dot{\varphi} = 0$

- $\dot{\varphi} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad J\ddot{\varphi} + MgR\sin\varphi = 0 \quad \checkmark$

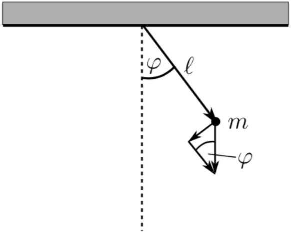
Mathematisches Pendel



- masseloser Faden mit Länge ℓ
- Punktmasse m

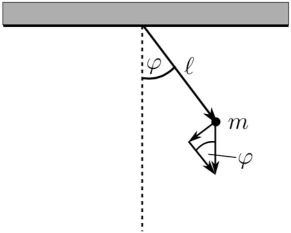
Mathematisches Pendel

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



- masseloser Faden mit Länge ℓ
- Punktmasse m
- Bahngeschwindigkeit: $\dot{\vec{r}} = \ell \dot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi$

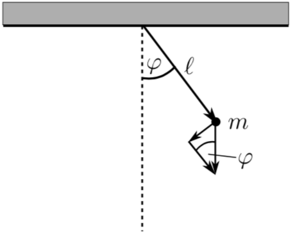
Mathematisches Pendel



- masseloser Faden mit Länge ℓ
- Punktmasse m
- Bahngeschwindigkeit: $\dot{\vec{r}} = \ell\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$

- Newton: $m\,\ell\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0$

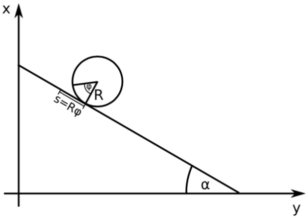
Mathematisches Pendel



- masseloser Faden mit Länge ℓ
- Punktmasse m
- Bahngeschwindigkeit: $\dot{\vec{r}} = \ell\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$

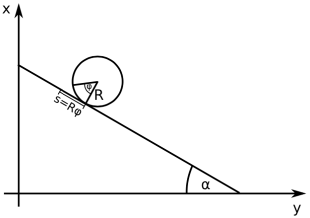
- Newton: $m\ell\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0$
- Vergleich physikalisches Pendel: $\ddot{\varphi} + \frac{MgR}{J}\sin\varphi = 0 \quad \longrightarrow \quad \ell \mathrel{\hat{=}} \frac{J}{MR}$

3.2.2 Rollbewegung



- Zylinder mit zylindersymm. Massenverteilung

3.2.2 Rollbewegung



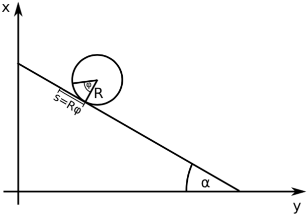
- Zylinder mit zylindersymm. Massenverteilung
- körperfestes Koordinatensystem:

  Ursprung = Schwerpunkt des Zylinders

  Drehachse = z'-Achse $\quad (\vec{e}_{z'} = \vec{e}_z)$

3.2.2 Rollbewegung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



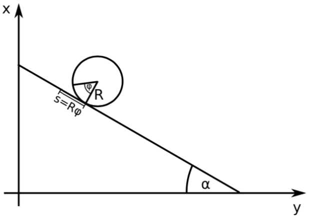
- Zylinder mit zylindersymm. Massenverteilung
- körperfestes Koordinatensystem:

  Ursprung = Schwerpunkt des Zylinders

  Drehachse = z'-Achse $\quad (\vec{e}_{z'} = \vec{e}_z)$
- Rollbewegung $\Rightarrow$ Drehachse nicht raumfest!

3.2.2 Rollbewegung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- Zylinder mit zylindersymm. Massenverteilung
- körperfestes Koordinatensystem:

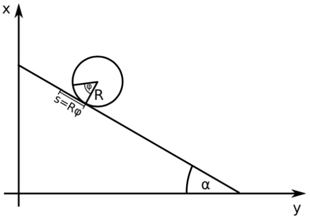
  Ursprung = Schwerpunkt des Zylinders

  Drehachse = z'-Achse $\quad (\vec{e}_{z'} = \vec{e}_z)$
- Rollbewegung $\Rightarrow$ Drehachse nicht raumfest!

- Schwerpunktsvektor: $\vec{r}_0(t) = \vec{r}_0(0) + \vec{s}(t) = \vec{r}_0(0) + \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} R\,\varphi(t)$

3.2.2 Rollbewegung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- Zylinder mit zylindersymm. Massenverteilung
- körperfestes Koordinatensystem:

  Ursprung = Schwerpunkt des Zylinders

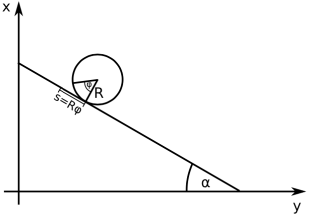
  Drehachse = z'-Achse $\quad (\vec{e}_{z'} = \vec{e}_z)$
- Rollbewegung $\Rightarrow$ Drehachse nicht raumfest!

- Schwerpunktsvektor: $\vec{r}_0(t) = \vec{r}_0(0) + \vec{s}(t) = \vec{r}_0(0) + \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} R\,\varphi(t)$

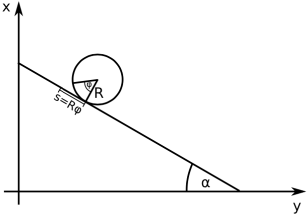
- beliebiger Zylinderpunkt im raumfesten Koordinatensystem:

  $\vec{r}^{\,(i)}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}^{\,(i)\prime}(t) = \vec{r}_0(0) + \vec{s}(t) + \vec{r}^{\,(i)\prime}(t)$

  $\vec{r}^{\,(i)\prime}(t)$: Bewegung relativ zum Schwerpunkt $\hat{=}$ Drehung um raumfeste Achse

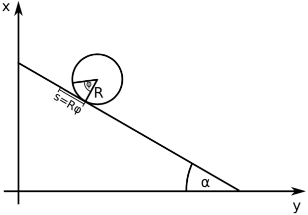


$$\vec{r}^{\,(i)}(t) = \vec{r}_0(0) + \vec{s}(t) + \vec{r}^{\,(i)\prime}(t)$$



$$\vec{r}^{\,(i)}(t) = \vec{r}_0(0) + \vec{s}(t) + \vec{r}^{\,(i)\prime}(t)$$

- kinetische Energie: $T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{\vec{s}} + \dot{\vec{r}}^{\,(i)\prime})^2$



$$\vec{r}^{\,(i)}(t) = \vec{r}_0(0) + \vec{s}(t) + \vec{r}^{\,(i)\prime}(t)$$

- kinetische Energie: $T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)\,2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{\vec{s}} + \dot{\vec{r}}^{\,(i)\prime})^2$

  explizite Auswertung (Übung): $T = T_{trans} + T_{rot}$

  - $T_{trans} = \frac{1}{2}M\dot{\vec{s}}^{\,2}$
  - $T_{rot} = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$ kein Mischterm!