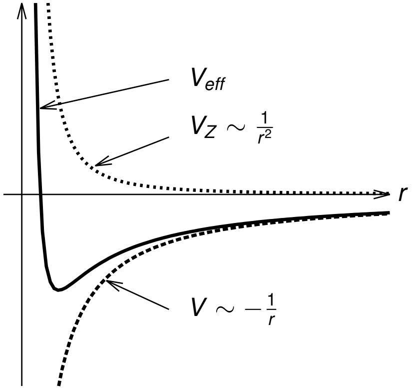
Beispiel: $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$, $\kappa > 0$ (z.B. Gravitation: $\kappa = G m_1 m_2$)



- kleine r: V_Z dominiert
- große r: V dominiert

- allgemein: $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{eff}(r)$

$$\Leftrightarrow \; E - V_{eff}(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \geq 0$$

- allgemein: $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$

$$\Leftrightarrow \; E - V_{eff}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$$

Für vorgegebene Energie E ergibt sich daraus:

  - klassisch erlaubter Bereich: r mit $V_{eff}(r) \leq E$
  - klassisch verbotener Bereich: r mit $V_{eff}(r) > E$

- allgemein: $E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$

  $$\Leftrightarrow \; E - V_{eff}(r) = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 \geq 0$$

  Für vorgegebene Energie E ergibt sich daraus:

  - klassisch erlaubter Bereich: r mit $V_{eff}(r) \leq E$
  - klassisch verbotener Bereich: r mit $V_{eff}(r) > E$
  - klassische Umkehrpunkte: $V_{eff}(r = r_{\mathrm{Umk}}) = E$

- allgemein: $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$

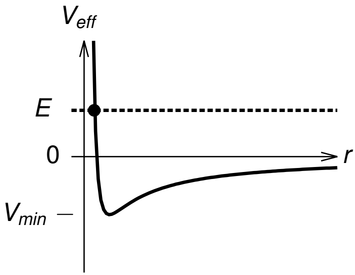
$$\Leftrightarrow \; E - V_{eff}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$$

Für vorgegebene Energie E ergibt sich daraus:

  - klassisch erlaubter Bereich: r mit $V_{eff}(r) \leq E$
  - klassisch verbotener Bereich: r mit $V_{eff}(r) > E$
  - klassische Umkehrpunkte: $V_{eff}(r = r_{\mathrm{Umk}}) = E$

    $\Rightarrow \; \dot{r} = 0 \; \rightarrow$ (Radialbewegung ändert Richtung)

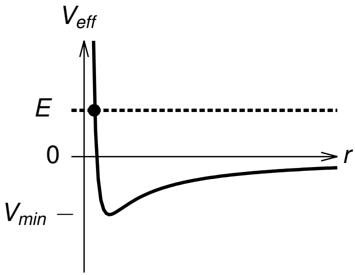
Beispiel: $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$, $\kappa > 0$ (z.B. Gravitation: $\kappa = Gm_1 m_2$)



$\underline{E > 0}$

- Umkehrpunkt: r_{min}
- erlaubter Bereich: $r \geq r_{min}$
- verbotener Bereich: $r < r_{min}$

Beispiel: $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$, $\kappa > 0$ (z.B. Gravitation: $\kappa = G m_1 m_2$)

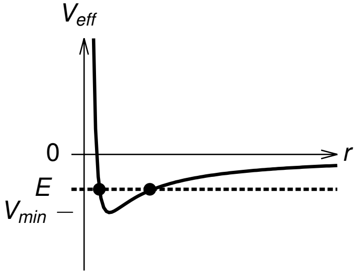


$\underline{E > 0}$

- Umkehrpunkt: r_{min}
- erlaubter Bereich: $r \geq r_{min}$
- verbotener Bereich: $r < r_{min}$

ungebundene Bewegung

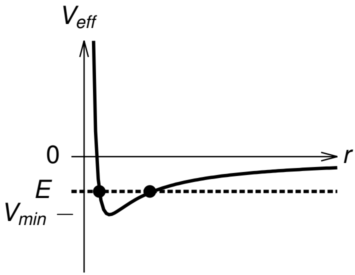
Beispiel: $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$, $\kappa > 0$ (z.B. Gravitation: $\kappa = Gm_1 m_2$)



$\underline{V_{min} < E < 0}$

- Umkehrpunkte: $r_{min} < r_{max}$
- erlaubter Bereich:
  $r_{min} \leq r \leq r_{max}$
- verbotene Bereiche:
  $r < r_{min}, \quad r > r_{max}$

Beispiel: $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$, $\kappa > 0$ (z.B. Gravitation: $\kappa = Gm_1 m_2$)

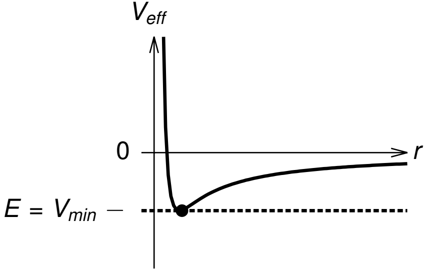


$\underline{V_{min} < E < 0}$

- Umkehrpunkte: $r_{min} < r_{max}$
- erlaubter Bereich:
  $r_{min} \leq r \leq r_{max}$
- verbotene Bereiche:
  $r < r_{min}, \quad r > r_{max}$

gebundene Bewegung

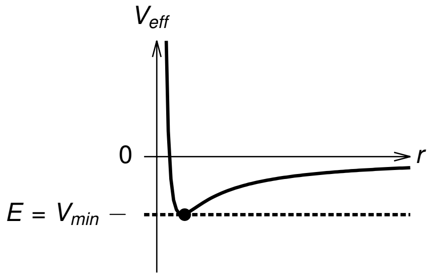
Beispiel: $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$, $\kappa > 0$ (z.B. Gravitation: $\kappa = Gm_1 m_2$)



$\underline{E = V_{min}}$

= Grenzfall mit $r_{min} = r_{max}$

Beispiel: $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$, $\kappa > 0$ (z.B. Gravitation: $\kappa = Gm_1 m_2$)

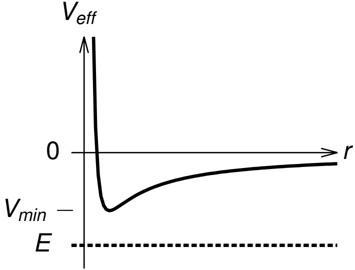


$\underline{E = V_{min}}$

= Grenzfall mit $r_{min} = r_{max}$

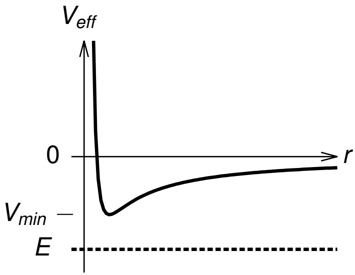
Kreisbahn

Beispiel: $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$, $\kappa > 0$ (z.B. Gravitation: $\kappa = Gm_1 m_2$)



$\underline{E < V_{min}}$

Beispiel: $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$, $\kappa > 0$ (z.B. Gravitation: $\kappa = Gm_1 m_2$)



$\underline{E < V_{min}}$

keine Lösung

Lösung der radialen Bewegungsgleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$

Lösung der radialen Bewegungsgleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V_{eff}(r)\big)}$

Lösung der radialen Bewegungsgleichung

- $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{eff}(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}$
- Trennung der Variablen: $dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}}$

Lösung der radialen Bewegungsgleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{eff}(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}$
- Trennung der Variablen: $dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}}$
- Integration: $t(r) - t(r_0) = \int\limits_{t(r_0)}^{t(r)} dt = \pm \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r')\right)}}$

Lösung der radialen Bewegungsgleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}$
- Trennung der Variablen: $dt = \pm\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}}$
- Integration: $t(r) - t(r_0) = \int_{t(r_0)}^{t(r)} dt = \pm\int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r')\right)}} \quad \xrightarrow{\text{Umkehrfkt.}} \quad r(t)$

Lösung der radialen Bewegungsgleichung

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- $E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + V_{eff}(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}$
- Trennung der Variablen: $dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}}$
- Integration: $t(r) - t(r_0) = \int\limits_{t(r_0)}^{t(r)} dt = \pm \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r')\right)}} \quad \xrightarrow{\text{Umkehrfkt.}} \quad r(t)$
  - E und L legen nur den Betrag der Radialgeschwindigkeit im Abstand r fest, nicht aber deren Richtung ($\pm$).
  - Zeitumkehrinvarianz:
    Die „Vorwärtsbewegung" von r_0 nach r dauert genauso lange wie die „Rückwärtsbewegung" von r nach r_0.

Winkelbewegung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\vec{L} = mr^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z = const.$

  $\Rightarrow$ Vorzeichen von $\dot{\varphi}$ ändert sich nicht $\longrightarrow$ konstanter Umlaufsinn

Winkelbewegung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\vec{L} = mr^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z = const.$

  $\Rightarrow$ Vorzeichen von $\dot{\varphi}$ ändert sich nicht → konstanter Umlaufsinn

- Wähle $\vec{L} = L\,\vec{e}_z, \quad L = |\vec{L}| > 0$

  $\Rightarrow$ $\dot{\varphi} > 0$ → Bewegung gegen den Uhrzeigersinn

Winkelbewegung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\vec{L} = mr^2 \dot{\varphi}\, \vec{e}_z = const.$

  $\Rightarrow$ Vorzeichen von $\dot{\varphi}$ ändert sich nicht $\longrightarrow$ konstanter Umlaufsinn

- Wähle $\vec{L} = L\, \vec{e}_z, \quad L = |\vec{L}| > 0$

  $\Rightarrow$ $\dot{\varphi} > 0$ $\longrightarrow$ Bewegung gegen den Uhrzeigersinn

- $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2} \quad \Rightarrow \quad d\varphi = \frac{L}{mr^2}\, dt$

Winkelbewegung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\vec{L} = mr^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z = const.$

  $\Rightarrow$ Vorzeichen von $\dot{\varphi}$ ändert sich nicht $\longrightarrow$ konstanter Umlaufsinn

- Wähle $\vec{L} = L\,\vec{e}_z, \quad L = |\vec{L}| > 0$

  $\Rightarrow \dot{\varphi} > 0$ $\longrightarrow$ Bewegung gegen den Uhrzeigersinn

- $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2} \quad \Rightarrow \quad d\varphi = \frac{L}{mr^2}\,dt$

  $$\Rightarrow \varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} dt' \, \frac{L}{mr^2(t')}$$

Bahnkurve

- gesucht: $r = r(\varphi)$

Bahnkurve

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- gesucht: $r = r(\varphi)$
- $r = r(\varphi(t)) \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\,\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}$

Bahnkurve

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- gesucht: $r = r(\varphi)$
- $r = r(\varphi(t)) \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\,\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}$
- Wir hatten: $\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}\,, \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$

Bahnkurve

- gesucht: $r = r(\varphi)$
- $r = r(\varphi(t)) \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\,\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}$
- Wir hatten: $\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V_{eff}(r)\big)}\,, \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\,r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}$$

Bahnkurve

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- gesucht: $r = r(\varphi)$
- $r = r(\varphi(t)) \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\,\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}$
- Wir hatten: $\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}\,, \qquad \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\,r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}$$

$$\Rightarrow \quad d\varphi = \pm\frac{L}{\sqrt{2m}}\,\frac{dr}{r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}}$$

Bahnkurve

- gesucht: $r = r(\varphi)$
- $r = r(\varphi(t)) \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\,\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}$
- Wir hatten: $\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V_{eff}(r)\big)}\,, \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\,r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}$$

$$\Rightarrow \quad d\varphi = \pm\frac{L}{\sqrt{2m}}\,\frac{dr}{r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(r) - \varphi(r_0) = \pm\frac{L}{\sqrt{2m}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'^{\,2}\sqrt{E - V_{eff}(r')}}$$

Bahnkurve

- gesucht: $r = r(\varphi)$
- $r = r(\varphi(t)) \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\,\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}$
- Wir hatten: $\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}\,, \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$

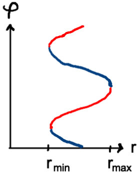
$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2 \sqrt{E - V_{eff}(r)}$$

$$\Rightarrow \quad d\varphi = \pm\frac{L}{\sqrt{2m}}\,\frac{dr}{r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(r) - \varphi(r_0) = \pm\frac{L}{\sqrt{2m}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'^{\,2}\sqrt{E - V_{eff}(r')}}$$

+ für monoton wachsendes r

- für monoton fallendes r



Bahnkurve

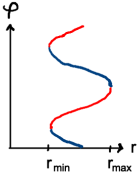
- gesucht: $r = r(\varphi)$
- $r = r(\varphi(t)) \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\,\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}$
- Wir hatten: $\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}\,, \qquad \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2 \sqrt{E - V_{eff}(r)}$$

$$\Rightarrow \quad d\varphi = \pm\frac{L}{\sqrt{2m}}\,\frac{dr}{r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(r) - \varphi(r_0) = \pm\frac{L}{\sqrt{2m}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'^{\,2}\sqrt{E - V_{eff}(r')}}$$

  + für monoton wachsendes r
  - für monoton fallendes r

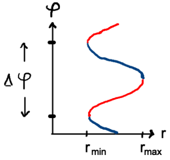


- Umkehrfunktion: $r(\varphi)$

Klassifizierung gebundener Bewegungen

Winkeländerung während einer Periode $r_{min} \to r_{max} \to r_{min}$:

$$\Delta\varphi = \frac{L}{\sqrt{2m}}\left(\int\limits_{r_{min}}^{r_{max}} dr' \cdots - \int\limits_{r_{max}}^{r_{min}} dr' \;\ldots \right) = \sqrt{\frac{2}{m}}\, L \int\limits_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr'}{r'^{\,2}\sqrt{E - V_{eff}(r')}}$$

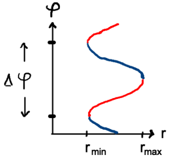


Klassifizierung gebundener Bewegungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Winkeländerung während einer Periode $r_{min} \rightarrow r_{max} \rightarrow r_{min}$:

$$\Delta\varphi = \frac{L}{\sqrt{2m}} \Big(\int_{r_{min}}^{r_{max}} dr' \cdots - \int_{r_{max}}^{r_{min}} dr' \dots \Big) = \sqrt{\frac{2}{m}}\, L \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr'}{r'^{\,2}\sqrt{E - V_{eff}(r')}}$$



- $\Delta\varphi = 2\pi n,\ n \in \mathbb{N}$

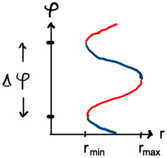
  $\Rightarrow$ Richtung von r_{min} („Perihel“) konstant

Klassifizierung gebundener Bewegungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Winkeländerung während einer Periode $r_{min} \to r_{max} \to r_{min}$:

$$\Delta\varphi = \frac{L}{\sqrt{2m}}\left(\int_{r_{min}}^{r_{max}} dr' \cdots - \int_{r_{max}}^{r_{min}} dr' \ \ldots \right) = \sqrt{\frac{2}{m}}\, L \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr'}{r'^{\,2}\sqrt{E - V_{eff}(r')}}$$



- $\Delta\varphi = 2\pi n,\ n \in \mathbb{N}$

  $\Rightarrow$ Richtung von r_{min} („Perihel“) konstant

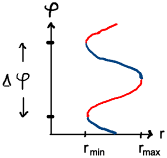
- $\Delta\varphi = 2\pi \frac{n}{m},\ n, m \in \mathbb{N}$: „geschlossene Bahn“

  $\Rightarrow$ Perihel kommt nach m Perioden (bzgl. r) zurück zum Ausgangspunkt

Klassifizierung gebundener Bewegungen

Winkeländerung während einer Periode $r_{min} \rightarrow r_{max} \rightarrow r_{min}$:

$$\Delta\varphi = \frac{L}{\sqrt{2m}}\Big(\int_{r_{min}}^{r_{max}} dr' \cdots - \int_{r_{max}}^{r_{min}} dr' \ \ldots \Big) = \sqrt{\frac{2}{m}}\, L \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr'}{r'^{\,2}\sqrt{E - V_{eff}(r')}}$$



- $\Delta\varphi = 2\pi n,\ n \in \mathbb{N}$

  $\Rightarrow$ Richtung von r_{min} („Perihel“) konstant

- $\Delta\varphi = 2\pi \frac{n}{m},\ n, m \in \mathbb{N}$: „geschlossene Bahn“

  $\Rightarrow$ Perihel kommt nach m Perioden (bzgl. r) zurück zum Ausgangspunkt

- sonst: „offene Bahn“

2.4 Lösung für das Gravitationspotenzial

2.4 Lösung für das Gravitationspotenzial

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} \equiv -\frac{\kappa}{r}\,, \qquad \kappa \equiv G m_1 m_2 = GMm \quad (m \equiv \mu)$

  $\Rightarrow \quad V_{eff} = -\frac{\kappa}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$

2.4 Lösung für das Gravitationspotenzial

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} \equiv -\frac{\kappa}{r}\ ,\qquad \kappa \equiv G m_1 m_2 = GMm \quad (m \equiv \mu)$

  $$\Rightarrow \quad V_{eff} = -\frac{\kappa}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

  $$\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2 \sqrt{E - V_{eff}(r)} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2 \sqrt{E + \frac{\kappa}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}}$$

2.4 Lösung für das Gravitationspotenzial

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} \equiv -\frac{\kappa}{r}\,,\qquad \kappa \equiv Gm_1 m_2 = GMm \quad (m \equiv \mu)$

  $\Rightarrow \quad V_{eff} = -\frac{\kappa}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$

  $\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2 \sqrt{E - V_{eff}(r)} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2 \sqrt{E + \frac{\kappa}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}}$

- Subst.: $u \equiv \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$

2.4 Lösung für das Gravitationspotenzial

- $V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} \equiv -\frac{\kappa}{r}$, $\quad \kappa \equiv G m_1 m_2 = GMm \quad (m \equiv \mu)$

  $$\Rightarrow \quad V_{eff} = -\frac{\kappa}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

  $$\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2 \sqrt{E - V_{eff}(r)} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2 \sqrt{E + \frac{\kappa}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}}$$

- Subst.: $u \equiv \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$

  $$\Rightarrow \quad \frac{du}{d\varphi} = \mp\frac{\sqrt{2m}}{L}\sqrt{E + \kappa u - \frac{L^2}{2m}u^2}$$

2.4 Lösung für das Gravitationspotenzial

- $V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} \equiv -\frac{\kappa}{r}$, $\quad \kappa \equiv G m_1 m_2 = GMm \quad (m \equiv \mu)$

  $$\Rightarrow \quad V_{eff} = -\frac{\kappa}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

  $$\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2 \sqrt{E - V_{eff}(r)} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2 \sqrt{E + \frac{\kappa}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}}$$

- Subst.: $u \equiv \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$

  $$\Rightarrow \quad \frac{du}{d\varphi} = \mp\frac{\sqrt{2m}}{L}\sqrt{E + \kappa u - \frac{L^2}{2m}u^2} \qquad \Rightarrow \quad \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} + \frac{2m\kappa}{L^2}u - u^2$$

2.4 Lösung für das Gravitationspotenzial

- $V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} \equiv -\frac{\kappa}{r}$, $\quad \kappa \equiv G m_1 m_2 = GMm \quad (m \equiv \mu)$

$$\Rightarrow \quad V_{eff} = -\frac{\kappa}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2 \sqrt{E - V_{eff}(r)} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2 \sqrt{E + \frac{\kappa}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}}$$

- Subst.: $u \equiv \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{d\varphi} = \mp\frac{\sqrt{2m}}{L}\sqrt{E + \kappa u - \frac{L^2}{2m}u^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} + \frac{2m\kappa}{L^2}u - u^2$$

- Subst.: $w \equiv u - \frac{m\kappa}{L^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dw}{d\varphi} = \frac{du}{d\varphi}, \quad w^2 = u^2 - \frac{2m\kappa}{L^2}u + \frac{m^2\kappa^2}{L^4}$

2.4 Lösung für das Gravitationspotenzial

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} \equiv -\frac{\kappa}{r}\,, \qquad \kappa \equiv G m_1 m_2 = GMm \quad (m \equiv \mu)$

  $\Rightarrow \quad V_{eff} = -\frac{\kappa}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$

  $\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2 \sqrt{E - V_{eff}(r)} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2 \sqrt{E + \frac{\kappa}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}}$

- Subst.: $u \equiv \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$

  $\Rightarrow \quad \frac{du}{d\varphi} = \mp\frac{\sqrt{2m}}{L}\sqrt{E + \kappa u - \frac{L^2}{2m}u^2} \qquad \Rightarrow \quad \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} + \frac{2m\kappa}{L^2}u - u^2$

- Subst.: $w \equiv u - \frac{m\kappa}{L^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dw}{d\varphi} = \frac{du}{d\varphi}, \qquad w^2 = u^2 - \frac{2m\kappa}{L^2}u + \frac{m^2\kappa^2}{L^4}$

  $\Rightarrow \quad \left(\frac{dw}{d\varphi}\right)^2 = -w^2 + \frac{m^2\kappa^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}$

2.4 Lösung für das Gravitationspotenzial

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} \equiv -\frac{\kappa}{r}\,, \qquad \kappa \equiv Gm_1 m_2 = GMm \quad (m \equiv \mu)$

  $\Rightarrow \quad V_{eff} = -\frac{\kappa}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$

  $\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\, r^2\sqrt{E + \frac{\kappa}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}}$

- Subst.: $u \equiv \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$

  $\Rightarrow \quad \frac{du}{d\varphi} = \mp\frac{\sqrt{2m}}{L}\sqrt{E + \kappa u - \frac{L^2}{2m}u^2} \qquad \Rightarrow \quad \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} + \frac{2m\kappa}{L^2}u - u^2$

- Subst.: $w \equiv u - \frac{m\kappa}{L^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dw}{d\varphi} = \frac{du}{d\varphi}, \quad w^2 = u^2 - \frac{2m\kappa}{L^2}u + \frac{m^2\kappa^2}{L^4}$

  $\Rightarrow \quad \left(\frac{dw}{d\varphi}\right)^2 = -w^2 + \frac{m^2\kappa^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2} = -w^2 + A^2 \quad \text{mit } A^2 \equiv \frac{m^2\kappa^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}$

$$\left(\frac{dw}{d\varphi}\right)^2 + w^2 = A^2, \qquad A^2 = \frac{m^2\kappa^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}$$

$$\left(\frac{dw}{d\varphi}\right)^2 + w^2 = A^2, \qquad A^2 = \frac{m^2\kappa^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}$$

- Lösung: $w(\varphi) = A\cos(\varphi - \varphi_0)$ $\qquad$ (φ_0: beliebige Integrationskonstante)

$$\left(\frac{dw}{d\varphi}\right)^2 + w^2 = A^2, \qquad A^2 = \frac{m^2\kappa^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}$$

- Lösung: $w(\varphi) = A\cos(\varphi - \varphi_0)$ (φ_0: beliebige Integrationskonstante)

Beweis: $\frac{dw}{d\varphi} = -A\sin(\varphi - \varphi_0)$

$$\Rightarrow \left(\frac{dw}{d\varphi}\right)^2 + w^2 = A^2\left(\sin^2(\varphi - \varphi_0) + \cos^2(\varphi - \varphi_0)\right) = A^2 \quad \checkmark$$

$$\left(\frac{dw}{d\varphi}\right)^2 + w^2 = A^2, \qquad A^2 = \frac{m^2\kappa^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}$$

- **Lösung:** $w(\varphi) = A\cos(\varphi - \varphi_0)$ (φ_0: beliebige Integrationskonstante)

  Beweis: $\frac{dw}{d\varphi} = -A\sin(\varphi - \varphi_0)$

  $$\Rightarrow \left(\frac{dw}{d\varphi}\right)^2 + w^2 = A^2\left(\sin^2(\varphi-\varphi_0) + \cos^2(\varphi-\varphi_0)\right) = A^2 \quad \checkmark$$

- Zusammenstellung:

$$\frac{1}{r} = u = w + \frac{m\kappa}{L^2} = \sqrt{\frac{m^2\kappa^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}}\,\cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{m\kappa}{L^2}$$
$$= \frac{m\kappa}{L^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{m\kappa^2}}\,\cos(\varphi - \varphi_0)\right)$$

Kegelschnitte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} r(\varphi) &= \frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)} && \text{Kegelschnittgleichung} \\ p &= \frac{L^2}{m\kappa} \\ \varepsilon &= \sqrt{1+\frac{2L^2E}{m\kappa^2}} && \text{„numerische Exzentrizität“} \end{aligned}}$$

Kegelschnitte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

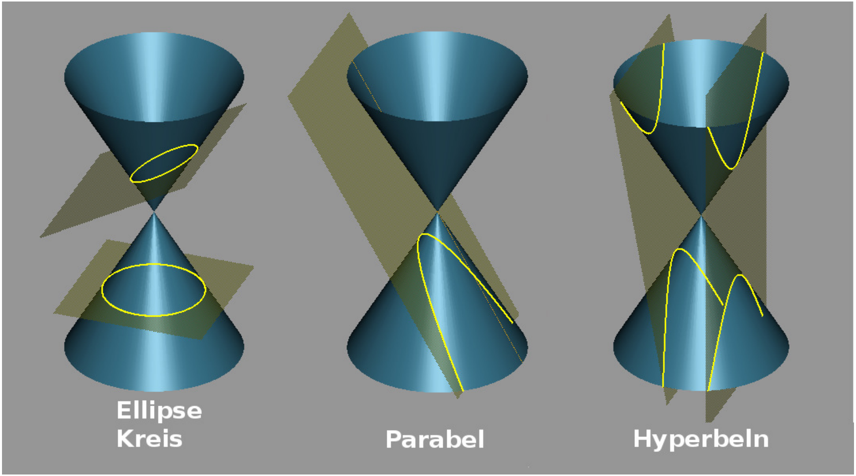
$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{lcll} r(\varphi) & = & \frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)} & \text{Kegelschnittgleichung} \\ p & = & \frac{L^2}{m\kappa} & \\ \varepsilon & = & \sqrt{1+\frac{2L^2E}{m\kappa^2}} & \text{„numerische Exzentrizität“} \end{array}}$$

- $\varepsilon > 1 \quad (\Leftrightarrow \quad E > 0)$: Hyperbel
- $\varepsilon = 1 \quad (\Leftrightarrow \quad E = 0)$: Parabel
- $\varepsilon < 1 \quad (\Leftrightarrow \quad E < 0)$: Ellipse

  Grenzfall $\varepsilon = 0 \quad (\Leftrightarrow \quad E = -\frac{m\kappa^2}{2L^2})$: Kreis

Kegelschnitte

(aus Wikipedia)



Ellipse

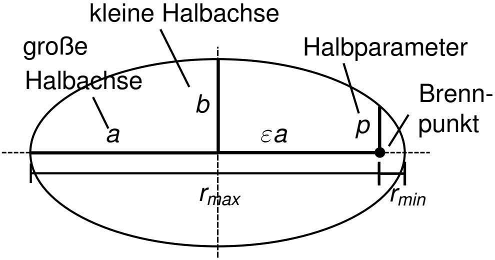
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wähle o.B.d.A. $\varphi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}\,, \qquad 0 \leq \varepsilon < 1$

$$r(0) = \frac{p}{1+\varepsilon} = r_{min}$$

$$r(\pi) = \frac{p}{1-\varepsilon} = r_{max}$$

$$r(\frac{\pi}{2}) = r(\frac{3\pi}{2}) = p$$



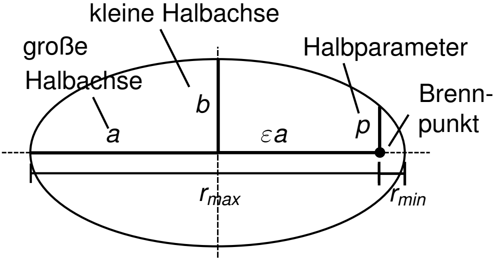
Ellipse

Wähle o.B.d.A. $\varphi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}\,, \qquad 0 \leq \varepsilon < 1$

$$r(0) = \frac{p}{1+\varepsilon} = r_{min}$$

$$r(\pi) = \frac{p}{1-\varepsilon} = r_{max}$$

$$r(\frac{\pi}{2}) = r(\frac{3\pi}{2}) = p$$



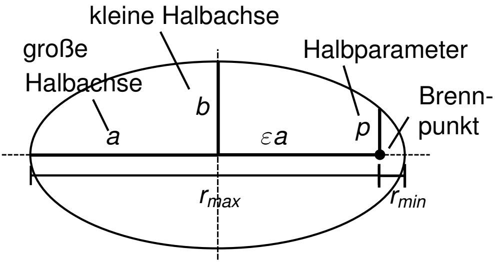
$\Rightarrow \quad 2a = r_{min} + r_{max} = \frac{2p}{1-\varepsilon^2}$

$\Rightarrow \quad a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = \frac{L^2}{m\kappa}\left(-\frac{m\kappa^2}{2L^2E}\right) = -\frac{\kappa}{2E} = \frac{\kappa}{2|E|}$

Ellipse

Wähle o.B.d.A. $\varphi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad r(\varphi) = \dfrac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}, \qquad 0 \leq \varepsilon < 1$

$$r(0) = \frac{p}{1+\varepsilon} = r_{min}$$
$$r(\pi) = \frac{p}{1-\varepsilon} = r_{max}$$
$$r(\frac{\pi}{2}) = r(\frac{3\pi}{2}) = p$$



$\Rightarrow \quad 2a = r_{min} + r_{max} = \frac{2p}{1-\varepsilon^2}$

$\Rightarrow \quad a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = \frac{L^2}{m\kappa}\left(-\frac{m\kappa^2}{2L^2E}\right) = -\frac{\kappa}{2E} = \frac{\kappa}{2|E|} \quad \Rightarrow \quad a = a(E)$

Ellipse

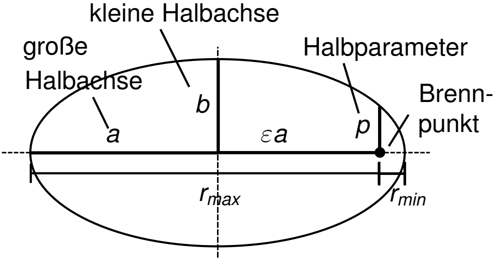
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wähle o.B.d.A. $\varphi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad r(\varphi) = \dfrac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}, \qquad 0 \leq \varepsilon < 1$

$$r(0) = \frac{p}{1+\varepsilon} = r_{min}$$

$$r(\pi) = \frac{p}{1-\varepsilon} = r_{max}$$

$$r(\frac{\pi}{2}) = r(\frac{3\pi}{2}) = p$$



$$\Rightarrow \quad 2a = r_{min} + r_{max} = \frac{2p}{1-\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = \frac{L^2}{m\kappa}\left(-\frac{m\kappa^2}{2L^2E}\right) = -\frac{\kappa}{2E} = \frac{\kappa}{2|E|} \quad \Rightarrow \; a = a(E)$$

$$p = \frac{L^2}{m\kappa} \quad \Rightarrow \; p = p(L)$$