2. Kepler-Problem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2.1 Schwerpunkts- und Relativbewegung des Zweikörpersystems

2.1 Schwerpunkts- und Relativbewegung des Zweikörpersystems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- zwei Punktmassen m_1 und m_2
  - innere Kräfte $\vec{F}^{(12)} = -\vec{F}^{(21)} \equiv \vec{F}$
  - keine äußeren Kräfte

2.1 Schwerpunkts- und Relativbewegung des Zweikörpersystems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- zwei Punktmassen m_1 und m_2
  - innere Kräfte $\vec{F}^{(12)} = -\vec{F}^{(21)} \equiv \vec{F}$
  - keine äußeren Kräfte
- Bewegungsgleichungen:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}^{\,(1)} = \vec{F} \qquad (1)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}^{\,(2)} = -\vec{F} \qquad (2)$$

(6 gekoppelte Dgln. 2. Ordnung für die Komponenten von $\vec{r}^{\,(1)}$ und $\vec{r}^{\,(2)}$)

2.1 Schwerpunkts- und Relativbewegung des Zweikörpersystems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- zwei Punktmassen m_1 und m_2
  - innere Kräfte $\vec{F}^{(12)} = -\vec{F}^{(21)} \equiv \vec{F}$
  - keine äußeren Kräfte
- Bewegungsgleichungen:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}^{\,(1)} = \vec{F} \qquad (1)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}^{\,(2)} = -\vec{F} \qquad (2)$$

(6 gekoppelte Dgln. 2. Ordnung für die Komponenten von $\vec{r}^{\,(1)}$ und $\vec{r}^{\,(2)}$)

- Schwerpunkts- und Relativkoordinaten:

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\left(m_1 \vec{r}^{\,(1)} + m_2 \vec{r}^{\,(2)}\right), \qquad \vec{r} \equiv \vec{r}_{12} = \vec{r}^{\,(1)} - \vec{r}^{\,(2)}, \qquad M = m_1 + m_2$$

2.1 Schwerpunkts- und Relativbewegung des Zweikörpersystems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- zwei Punktmassen m_1 und m_2
  - innere Kräfte $\vec{F}^{(12)} = -\vec{F}^{(21)} \equiv \vec{F}$
  - keine äußeren Kräfte
- Bewegungsgleichungen:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}^{(1)} = \vec{F} \qquad (1)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}^{(2)} = -\vec{F} \qquad (2)$$

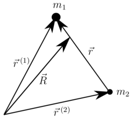
(6 gekoppelte Dgln. 2. Ordnung für die Komponenten von $\vec{r}^{(1)}$ und $\vec{r}^{(2)}$)

- Schwerpunkts- und Relativkoordinaten:

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\left(m_1 \vec{r}^{(1)} + m_2 \vec{r}^{(2)}\right), \qquad \vec{r} \equiv \vec{r}_{12} = \vec{r}^{(1)} - \vec{r}^{(2)}, \qquad M = m_1 + m_2$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}^{(1)} = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r}$$

$$\vec{r}^{(2)} = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r}$$



- **1. Schwerpunktsbewegung**

$$(1) + (2) \quad \Rightarrow \quad M\ddot{\vec{R}} = m_1 \ddot{\vec{r}}^{\,(1)} + m_2 \ddot{\vec{r}}^{\,(2)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = M\dot{\vec{R}} = const.$$

- **1. Schwerpunktsbewegung**

$$(1) + (2) \quad \Rightarrow \quad M\ddot{\vec{R}} = m_1\ddot{\vec{r}}^{\,(1)} + m_2\ddot{\vec{r}}^{\,(2)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = M\dot{\vec{R}} = const.$$

- **2. Relativbewegung**

$$m_2 \cdot (1) - m_1 \cdot (2) \quad \Rightarrow \quad m_1 m_2\, \ddot{\vec{r}} = m_1 m_2 \left(\ddot{\vec{r}}^{\,(1)} - \ddot{\vec{r}}^{\,(2)}\right) = (m_1 + m_2)\vec{F}$$

- **1. Schwerpunktsbewegung**

$$(1) + (2) \quad \Rightarrow \quad M\ddot{\vec{R}} = m_1\ddot{\vec{r}}^{\,(1)} + m_2\ddot{\vec{r}}^{\,(2)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = M\dot{\vec{R}} = const.$$

- **2. Relativbewegung**

$$m_2 \cdot (1) - m_1 \cdot (2) \quad \Rightarrow \quad m_1 m_2 \ddot{\vec{r}} = m_1 m_2 \left(\ddot{\vec{r}}^{\,(1)} - \ddot{\vec{r}}^{\,(2)}\right) = (m_1 + m_2)\vec{F}$$

Def.: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ „reduzierte Masse“ $\Rightarrow$ $\boxed{\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}}$

Die Relativbewegung des Zweiteilchensystems verhält sich so wie die Bewegung eines einzelnen Teilchens mit der reduzierten Masse μ unter dem Einfluss der Kraft $\vec{F}$!

(Reduktion des Zweiteilchen-Problems auf ein äquivalentes Einteilchen-Problem)

Reduzierte Masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad \mu M = m_1 m_2, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

Reduzierte Masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad \mu M = m_1 m_2, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

- Spezialfälle:
  - $m_1 = m_2 \equiv m \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2}$

Reduzierte Masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \quad \Rightarrow \quad \mu M = m_1 m_2, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

- Spezialfälle:
  - $m_1 = m_2 \equiv m \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2}$
  - $m_1 \ll m_2 \quad \Rightarrow \quad \mu \approx \frac{m_1 m_2}{m_2} = m_1$

Reduzierte Masse

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad \mu M = m_1 m_2, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

- Spezialfälle:
  - $m_1 = m_2 \equiv m \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2}$
  - $m_1 \ll m_2 \quad \Rightarrow \quad \mu \approx \frac{m_1 m_2}{m_2} = m_1$
- Beispiel. Erde und Sonne: $m_{♁} = 3 \cdot 10^{-6}\, m_\odot$

$$\Rightarrow \quad \mu \approx m_{♁}, \quad M \approx m_\odot, \quad \vec{r}_\odot \approx \vec{R}, \quad \vec{r}_{♁} \approx \vec{R} + \vec{r}$$

Reduzierte Masse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad \mu M = m_1 m_2, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

- Spezialfälle:
  - $m_1 = m_2 \equiv m \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2}$
  - $m_1 \ll m_2 \quad \Rightarrow \quad \mu \approx \frac{m_1 m_2}{m_2} = m_1$
- Beispiel. Erde und Sonne: $m_{♁} = 3 \cdot 10^{-6}\, m_{\odot}$

$$\Rightarrow \quad \mu \approx m_{♁}, \quad M \approx m_{\odot}, \quad \vec{r}_{\odot} \approx \vec{R}, \quad \vec{r}_{♁} \approx \vec{R} + \vec{r}$$

→ Im Schwerpunktsystem ($\vec{R} = \vec{0}$) ruht die Sonne in sehr guter Näherung am Koordinatenursprung, und $\vec{r}$ entspricht der Position der Erde.

Reduzierte Masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad \mu M = m_1 m_2, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

- Spezialfälle:
  - $m_1 = m_2 \equiv m \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2}$
  - $m_1 \ll m_2 \quad \Rightarrow \quad \mu \approx \frac{m_1 m_2}{m_2} = m_1$

- Beispiel. Erde und Sonne: $m_{\oplus} = 3 \cdot 10^{-6}\, m_{\odot}$

$$\Rightarrow \quad \mu \approx m_{\oplus}, \quad M \approx m_{\odot}, \quad \vec{r}_{\odot} \approx \vec{R}, \quad \vec{r}_{\oplus} \approx \vec{R} + \vec{r}$$

→ Im Schwerpunktsystem ($\vec{R} = \vec{0}$) ruht die Sonne in sehr guter Näherung am Koordinatenursprung, und $\vec{r}$ entspricht der Position der Erde.

- Notation:
  Im Folgenden schreiben wir oft m statt μ, wenn wir nicht explizit betonen wollen, dass es sich um die reduzierte Masse handelt.

2.2 Zentralkäfte

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

2.2 Zentralkäfte

- $\vec{F}$ zentrale Zweiteilchenkraft

  → äquivalentes Einteilchen-Problem:

  Teilchen mit Masse $m \equiv \mu$ im Feld einer Zentralkraft $\quad \vec{F}(\vec{r}) = f(r)\,\frac{\vec{r}}{r}$

  - Richtung: entlang der Verbindungslinie zum Ursprung
  - Stärke: hängt nur vom Betrag $r = |\vec{r}|$ ab

2.2 Zentralkäfte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\vec{F}$ zentrale Zweiteilchenkraft

  → äquivalentes Einteilchen-Problem:

  Teilchen mit Masse $m \equiv \mu$ im Feld einer Zentralkraft $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\,\frac{\vec{r}}{r}$
  - Richtung: entlang der Verbindungslinie zum Ursprung
  - Stärke: hängt nur vom Betrag $r = |\vec{r}|$ ab
- Eigenschaften:
  - $\vec{F}$ ist konservativ
  - $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(r), \quad f(r) = -\frac{dV}{dr}(r)$

2.2 Zentralkäfte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\vec{F}$ zentrale Zweiteilchenkraft

  → äquivalentes Einteilchen-Problem:

  Teilchen mit Masse $m \equiv \mu$ im Feld einer Zentralkraft $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\,\frac{\vec{r}}{r}$
  - Richtung: entlang der Verbindungslinie zum Ursprung
  - Stärke: hängt nur vom Betrag $r = |\vec{r}|$ ab
- Eigenschaften:
  - $\vec{F}$ ist konservativ
  - $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(r), \quad f(r) = -\frac{dV}{dr}(r)$

    Bsp. Gravitationspotenzial: $V_G(r) = -G\,\frac{m_1 m_2}{r} = -G\,\frac{mM}{r} \quad (m \equiv \mu)$

2.2 Zentralkäfte

- $\vec{F}$ zentrale Zweiteilchenkraft

  → äquivalentes Einteilchen-Problem:

  Teilchen mit Masse $m \equiv \mu$ im Feld einer Zentralkraft $\quad \vec{F}(\vec{r}) = f(r)\,\frac{\vec{r}}{r}$
  - Richtung: entlang der Verbindungslinie zum Ursprung
  - Stärke: hängt nur vom Betrag $r = |\vec{r}|$ ab
- Eigenschaften:
  - $\vec{F}$ ist konservativ
  - $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(r), \quad f(r) = -\frac{dV}{dr}(r)$

    Bsp. Gravitationspotenzial: $\quad V_G(r) = -G\,\frac{m_1 m_2}{r} = -G\,\frac{mM}{r} \quad (m \equiv \mu)$
  - Drehmoment: $\quad \vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}) = \frac{f(r)}{r}\,\underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_{=\vec{0}} = \vec{0}$

2.2 Zentralkäfte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\vec{F}$ zentrale Zweiteilchenkraft

  → äquivalentes Einteilchen-Problem:

  Teilchen mit Masse $m \equiv \mu$ im Feld einer Zentralkraft $\quad \vec{F}(\vec{r}) = f(r)\,\frac{\vec{r}}{r}$
  - Richtung: entlang der Verbindungslinie zum Ursprung
  - Stärke: hängt nur vom Betrag $r = |\vec{r}|$ ab
- Eigenschaften:
  - $\vec{F}$ ist konservativ
  - $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(r), \quad f(r) = -\frac{dV}{dr}(r)$

    Bsp. Gravitationspotenzial: $V_G(r) = -G\,\frac{m_1 m_2}{r} = -G\,\frac{mM}{r} \quad (m \equiv \mu)$
  - Drehmoment: $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}) = \frac{f(r)}{r}\,\underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_{=\vec{0}} = \vec{0}$

  $\Rightarrow$ Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = const.$ (vgl. Abschnitt 1.4)

Konsequenzen der Drehimpulserhaltung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Konsequenzen der Drehimpulserhaltung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \quad \Rightarrow \quad \vec{L} \perp \vec{r}, \dot{\vec{r}}$

  Änderung von $\vec{r}$ im Zeitintervall dt: $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}\, dt \quad \Rightarrow \quad \vec{r}, d\vec{r} \perp \vec{L} = const.$

Konsequenzen der Drehimpulserhaltung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \quad \Rightarrow \quad \vec{L} \perp \vec{r}, \dot{\vec{r}}$

  Änderung von $\vec{r}$ im Zeitintervall dt: $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}\, dt \quad \Rightarrow \quad \vec{r}, d\vec{r} \perp \vec{L} = const.$

  ➞ Die Bewegung findet in einer festen Ebene $\perp \vec{L}$ statt.

Konsequenzen der Drehimpulserhaltung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \quad \Rightarrow \quad \vec{L} \perp \vec{r}, \dot{\vec{r}}$

  Änderung von $\vec{r}$ im Zeitintervall dt: $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}\, dt \quad \Rightarrow \quad \vec{r}, d\vec{r} \perp \vec{L} = const.$

  → Die Bewegung findet in einer festen Ebene $\perp \vec{L}$ statt.

- Zweites Kepler'sches Gesetz:

  Die Verbindungslinie zwischen einem Planeten und der Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (abhängig vom jeweiligen Planeten).

Konsequenzen der Drehimpulserhaltung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

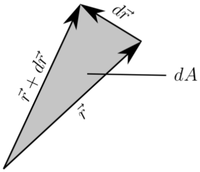
- $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \quad \Rightarrow \quad \vec{L} \perp \vec{r}, \dot{\vec{r}}$

  Änderung von $\vec{r}$ im Zeitintervall dt: $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}\,dt \quad \Rightarrow \quad \vec{r}, d\vec{r} \perp \vec{L} = const.$

  → Die Bewegung findet in einer festen Ebene $\perp \vec{L}$ statt.

- Zweites Kepler'sches Gesetz:

  Die Verbindungslinie zwischen einem Planeten und der Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (abhängig vom jeweiligen Planeten).



$$dA = \frac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{r}|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = \frac{|\vec{L}|}{2m} = const.$$

Konsequenzen der Drehimpulserhaltung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

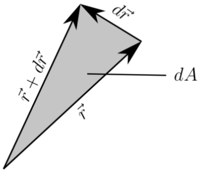
- $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \quad \Rightarrow \quad \vec{L} \perp \vec{r}, \dot{\vec{r}}$

  Änderung von $\vec{r}$ im Zeitintervall dt: $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}\, dt \quad \Rightarrow \quad \vec{r}, d\vec{r} \perp \vec{L} = const.$

  ➞ Die Bewegung findet in einer festen Ebene $\perp \vec{L}$ statt.

- Zweites Kepler'sches Gesetz:

  Die Verbindungslinie zwischen einem Planeten und der Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (abhängig vom jeweiligen Planeten).



$$dA = \frac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{r}|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = \frac{|\vec{L}|}{2m} = const.$$

beruht nur auf der Drehimpulserhaltung, nicht auf dem Gravitationsgesetz!

Koordinatenwahl

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wähle $\vec{L} = L\vec{e}_z \quad \Rightarrow$ Bewegung in der xy-Ebene

Koordinatenwahl

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wähle $\vec{L} = L\vec{e}_z \quad \Rightarrow$ Bewegung in der xy-Ebene
- Zentralkraft $\Rightarrow$ $\vec{F}$, V radialsymmetrisch

Koordinatenwahl

- Wähle $\vec{L} = L\vec{e}_z \quad \Rightarrow$ Bewegung in der *xy*-Ebene
- Zentralkraft $\Rightarrow$ $\vec{F}$, V radialsymmetrisch

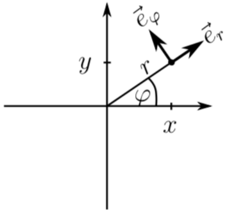
→ wähle ebene Polarkoordinaten:

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$\vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y = \vec{e}_r(\varphi)$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y = \vec{e}_\varphi(\varphi)$$

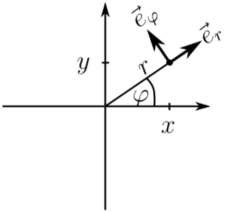


Koordinatenwahl

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wähle $\vec{L} = L\vec{e}_z$ $\quad\Rightarrow$ Bewegung in der *xy*-Ebene
- Zentralkraft $\Rightarrow$ $\vec{F}$, V radialsymmetrisch

→ wähle ebene Polarkoordinaten:



$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$\vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y = \vec{e}_r(\varphi)$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y = \vec{e}_\varphi(\varphi)$$

$$r = r(t),\ \varphi = \varphi(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{e}}_r = (-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y)\,\dot\varphi = \vec{e}_\varphi\,\dot\varphi$$

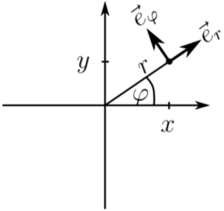
$$\dot{\vec{e}}_\varphi = (-\cos\varphi\,\vec{e}_x - \sin\varphi\,\vec{e}_y)\,\dot\varphi = -\vec{e}_r\,\dot\varphi$$

Koordinatenwahl

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wähle $\vec{L} = L\vec{e}_z \quad \Rightarrow$ Bewegung in der *xy*-Ebene
- Zentralkraft $\Rightarrow \vec{F}$, V radialsymmetrisch

→ wähle ebene Polarkoordinaten:



$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$\vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y = \vec{e}_r(\varphi)$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y = \vec{e}_\varphi(\varphi)$$

$$r = r(t),\ \varphi = \varphi(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{e}}_r = (-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y)\,\dot\varphi = \vec{e}_\varphi\,\dot\varphi$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = (-\cos\varphi\,\vec{e}_x - \sin\varphi\,\vec{e}_y)\,\dot\varphi = -\vec{e}_r\,\dot\varphi$$

Ortsvektor: $\vec{r}(t) = r(t)\,\vec{e}_r(t)$

Koordinatenwahl

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wähle $\vec{L} = L\vec{e}_z \quad \Rightarrow$ Bewegung in der *xy*-Ebene
- Zentralkraft $\Rightarrow$ $\vec{F}$, V radialsymmetrisch

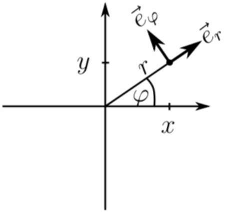
→ wähle ebene Polarkoordinaten:

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$\vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y = \vec{e}_r(\varphi)$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y = \vec{e}_\varphi(\varphi)$$



$$r = r(t),\ \varphi = \varphi(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{e}}_r = (-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y)\,\dot\varphi = \vec{e}_\varphi\,\dot\varphi$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = (-\cos\varphi\,\vec{e}_x - \sin\varphi\,\vec{e}_y)\,\dot\varphi = -\vec{e}_r\,\dot\varphi$$

Ortsvektor: $\vec{r}(t) = r(t)\,\vec{e}_r(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = \dot r(t)\,\vec{e}_r(t) + r(t)\,\dot{\vec{e}}_r(t) = \dot r\,\vec{e}_r + r\dot\varphi\,\vec{e}_\varphi$

$$\vec{r} = r\,\vec{e}_r, \qquad \vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{r} = r\,\vec{e}_r, \qquad \vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

Drehimpuls:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = mr\dot{r}\,\underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_r}_{=\vec{0}} + mr^2\dot{\varphi}\,\underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi}_{=\vec{e}_z} = mr^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

$$\vec{r} = r\,\vec{e}_r, \qquad \vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

Drehimpuls:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = mr\dot{r}\,\underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_r}_{=\vec{0}} + mr^2\dot{\varphi}\,\underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi}_{=\vec{e}_z} = mr^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z \qquad \Rightarrow \quad \vec{L}^{\,2} = m^2 r^4 \dot{\varphi}^2$$

$$\vec{r} = r\,\vec{e}_r, \qquad \vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

Drehimpuls:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = mr\dot{r}\,\underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_r}_{=\vec{0}} + mr^2\dot{\varphi}\,\underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi}_{=\vec{e}_z} = mr^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z \qquad \Rightarrow \quad \vec{L}^{\,2} = m^2 r^4 \dot{\varphi}^2$$

Energie:

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} + V(r) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r)$$

2.3 Lösung der Bewegungsgleichung für allgemeine Zentralkäfte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2.3 Lösung der Bewegungsgleichung für allgemeine Zentralkäfte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\vec{L}^2 = m^2 r^4 \dot{\varphi}^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{\vec{L}^2}{m^2 r^4}$$

2.3 Lösung der Bewegungsgleichung für allgemeine Zentralkäfte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\vec{L}^2 = m^2 r^4 \dot{\varphi}^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{\vec{L}^2}{m^2 r^4}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) + V(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} + V(r)$$

2.3 Lösung der Bewegungsgleichung für allgemeine Zentralkäfte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\vec{L}^{\,2} = m^2 r^4 \dot{\varphi}^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{\vec{L}^{\,2}}{m^2 r^4}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2\right) + V(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\vec{L}^{\,2}}{2mr^2} + V(r)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{eff}(r)} \quad \text{mit} \quad V_{eff}(r) = V(r) + \frac{\vec{L}^{\,2}}{2mr^2}$$

„effektives Potenzial“

2.3 Lösung der Bewegungsgleichung für allgemeine Zentralkäfte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\vec{L}^{\,2} = m^2 r^4 \dot{\varphi}^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{\vec{L}^{\,2}}{m^2 r^4}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) + V(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\vec{L}^{\,2}}{2mr^2} + V(r)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{eff}(r)} \quad \text{mit} \quad V_{eff}(r) = V(r) + \frac{\vec{L}^{\,2}}{2mr^2}$$

„effektives Potenzial“

- entspricht formal der Bewegung eines Teilchens in einer Dimension mit $T_{1D} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$ im Potenzial $V_{eff}(r)$

2.3 Lösung der Bewegungsgleichung für allgemeine Zentralkäfte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\vec{L}^2 = m^2 r^4 \dot{\varphi}^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{\vec{L}^2}{m^2 r^4}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) + V(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{eff}(r)} \qquad \text{mit} \quad V_{eff}(r) = V(r) + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} \qquad \text{„effektives Potenzial“}$$

- entspricht formal der Bewegung eines Teilchens in einer Dimension mit $T_{1D} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$ im Potenzial $V_{eff}(r)$
- $V_Z(r) = \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2$ kommt aber eigentlich aus der kinetischen Energie des 3D-Problems

2.3 Lösung der Bewegungsgleichung für allgemeine Zentralkäfte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\vec{L}^2 = m^2 r^4 \dot{\varphi}^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{\vec{L}^2}{m^2 r^4}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) + V(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{eff}(r)} \qquad \text{mit} \quad V_{eff}(r) = V(r) + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2}$$

„effektives Potenzial“

- entspricht formal der Bewegung eines Teilchens in einer Dimension mit $T_{1D} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$ im Potenzial $V_{eff}(r)$
- $V_Z(r) = \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2$ kommt aber eigentlich aus der kinetischen Energie des 3D-Problems
- physikalische Interpretation von V_Z:

  $$\vec{F}_Z(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V_Z(r) = \frac{\vec{L}^2}{mr^3} \vec{e}_r = m r \dot{\varphi}^2 \vec{e}_r \quad \hat{=} \quad \text{Zentrifugalkraft}$$

  $\rightarrow \; V_Z =$ Zentrifugalpotenzial