

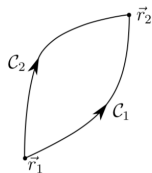
von jetzt ab: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}})$

von jetzt ab: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{x}}, \dot{\vec{x}})$

► konservatives Kraftfeld:

$$\int_{C_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{C_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \equiv W_{12},$$

falls C_1 und C_2 dieselben Anfangs- und Endpunkte besitzen



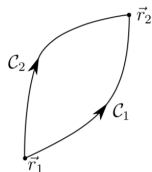
von jetzt ab: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}})$

- ▶ konservatives Kraftfeld:

$$\int_{C_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{C_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \equiv W_{12},$$

falls C_1 und C_2 dieselben Anfangs- und Endpunkte besitzen

- ▶ Potenzial (bzgl. eines Referenzpunkts \vec{R}): $V_{\vec{R}}(\vec{r}) \equiv - \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}')$

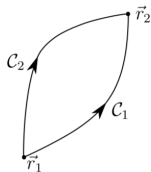


von jetzt ab: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}})$

► **konservatives Kraftfeld:**

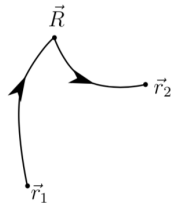
$$\int_{C_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{C_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \equiv W_{12},$$

falls C_1 und C_2 dieselben Anfangs- und Endpunkte besitzen



► **Potenzial** (bzgl. eines Referenzpunkts \vec{R}): $V_{\vec{R}}(\vec{r}) \equiv - \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}')$

$$\Rightarrow W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{\vec{R}}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) + \int_{\vec{R}}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$$

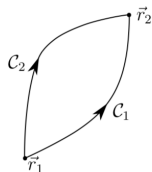


von jetzt ab: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{x}}, \dot{\vec{x}})$

- ▶ konservatives Kraftfeld:

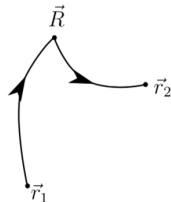
$$\int_{C_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{C_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \equiv W_{12},$$

falls C_1 und C_2 dieselben Anfangs- und Endpunkte besitzen



- ▶ Potenzial (bzgl. eines Referenzpunkts \vec{R}): $V_{\vec{R}}(\vec{r}) \equiv - \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}')$

$$\begin{aligned} \Rightarrow W_{12} &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{\vec{R}}^{\vec{R}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) + \int_{\vec{R}}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \\ &= - \int_{\vec{R}}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) + \int_{\vec{R}}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = V_{\vec{R}}(\vec{r}_1) - V_{\vec{R}}(\vec{r}_2) \end{aligned}$$





- ▶ anderer Referenzpunkt \vec{R}' :

$$V_{\vec{R}'}(\vec{r}) = - \int_{\vec{R}'}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}') = - \underbrace{\int_{\vec{R}'}^{\vec{R}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}_{\text{hängt nicht von } \vec{r} \text{ ab.}} - \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}') = V_{\vec{R}}(\vec{r}) + \text{const.}$$



- ▶ anderer Referenzpunkt \vec{R}' :

$$V_{\vec{R}'}(\vec{r}) = - \int_{\vec{R}'}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}') = - \underbrace{\int_{\vec{R}'}^{\vec{R}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}_{\text{hängt nicht von } \vec{r} \text{ ab.}} - \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}') = V_{\vec{R}}(\vec{r}) + \text{const.}$$

$$\Rightarrow W_{12} = V_{\vec{R}}(\vec{r}_1) - V_{\vec{R}}(\vec{r}_2) = V_{\vec{R}'}(\vec{r}_1) - V_{\vec{R}'}(\vec{r}_2)$$



- ▶ anderer Referenzpunkt \vec{R}' :

$$V_{\vec{R}'}(\vec{r}) = - \int_{\vec{R}'}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}') = - \underbrace{\int_{\vec{R}'}^{\vec{R}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}_{\text{hängt nicht von } \vec{r} \text{ ab.}} - \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}') = V_{\vec{R}}(\vec{r}) + \text{const.}$$

$$\Rightarrow W_{12} = V_{\vec{R}}(\vec{r}_1) - V_{\vec{R}}(\vec{r}_2) = V_{\vec{R}'}(\vec{r}_1) - V_{\vec{R}'}(\vec{r}_2) \equiv V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$$

($V(\vec{r})$ eindeutig bis auf eine physikalisch irrelevante Konstante)



- ▶ anderer Referenzpunkt \vec{R}' :

$$V_{\vec{R}'}(\vec{r}) = - \int_{\vec{R}'}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}') = - \underbrace{\int_{\vec{R}'}^{\vec{R}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}_{\text{hängt nicht von } \vec{r} \text{ ab.}} - \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}') = V_{\vec{R}}(\vec{r}) + \text{const.}$$

$$\Rightarrow W_{12} = V_{\vec{R}}(\vec{r}_1) - V_{\vec{R}}(\vec{r}_2) = V_{\vec{R}'}(\vec{r}_1) - V_{\vec{R}'}(\vec{r}_2) \equiv V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) \equiv V_1 - V_2$$

($V(\vec{r})$ eindeutig bis auf eine physikalisch irrelevante Konstante)



- ▶ anderer Referenzpunkt \vec{R}' :

$$V_{\vec{R}'}(\vec{r}) = - \int_{\vec{R}'}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}') = - \underbrace{\int_{\vec{R}'}^{\vec{R}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}_{\text{hängt nicht von } \vec{r} \text{ ab.}} - \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}') = V_{\vec{R}}(\vec{r}) + \text{const.}$$

$$\Rightarrow W_{12} = V_{\vec{R}}(\vec{r}_1) - V_{\vec{R}}(\vec{r}_2) = V_{\vec{R}'}(\vec{r}_1) - V_{\vec{R}'}(\vec{r}_2) \equiv V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) \equiv V_1 - V_2$$

($V(\vec{r})$ eindeutig bis auf eine physikalisch irrelevante Konstante)

- ▶ Wir hatten: $W_{12} = T_2 - T_1$ (für beliebige Kräfte)

$$\Rightarrow T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (\text{für konservative Kräfte})$$



- ▶ anderer Referenzpunkt \vec{R}' :

$$V_{\vec{R}'}(\vec{r}) = - \int_{\vec{R}'}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}') = - \underbrace{\int_{\vec{R}'}^{\vec{R}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}_{\text{hängt nicht von } \vec{r} \text{ ab.}} - \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}') = V_{\vec{R}}(\vec{r}) + \text{const.}$$

$$\Rightarrow W_{12} = V_{\vec{R}}(\vec{r}_1) - V_{\vec{R}}(\vec{r}_2) = V_{\vec{R}'}(\vec{r}_1) - V_{\vec{R}'}(\vec{r}_2) \equiv V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) \equiv V_1 - V_2$$

($V(\vec{r})$ eindeutig bis auf eine physikalisch irrelevante Konstante)

- ▶ Wir hatten: $W_{12} = T_2 - T_1$ (für beliebige Kräfte)

$$\Rightarrow T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (\text{für konservative Kräfte})$$

- ▶ Die **Gesamtenergie** $E = T + V$ ist für konservative Kräfte erhalten.



► $V = V(\vec{r}) = V(x, y, z)$

$$\Rightarrow dV = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial r_i} dr_i = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

► $V = V(\vec{r}) = V(x, y, z)$

$$\Rightarrow dV = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial r_i} dr_i = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{\nabla} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$



► $V = V(\vec{r}) = V(x, y, z)$

$$\Rightarrow dV = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial r_i} dr_i = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{\nabla} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = W_{12} = V_1 - V_2 = - \int_{V_1}^{V_2} dV = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{r})$$



► $V = V(\vec{r}) = V(x, y, z)$

$$\Rightarrow dV = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial r_i} dr_i = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{\nabla} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = W_{12} = V_1 - V_2 = - \int_{V_1}^{V_2} dV = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{r})$$

Das gilt für beliebige \vec{r}_1 und \vec{r}_2 . \Rightarrow $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$



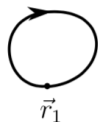
► Es gilt: $\vec{F}(\vec{r})$ konservativ $\Leftrightarrow \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 0$ für alle **geschlossenen** Wege \mathcal{C}



- Es gilt: $\vec{F}(\vec{r})$ konservativ $\Leftrightarrow \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 0$ für alle **geschlossenen** Wege \mathcal{C}

Beweis:

„ \Rightarrow “: $\oint d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = V_1 - V_1 = 0 \quad \checkmark$

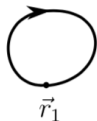




- Es gilt: $\vec{F}(\vec{r})$ konservativ $\Leftrightarrow \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 0$ für alle **geschlossenen** Wege C

Beweis:

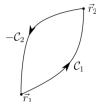
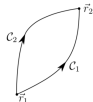
„ \Rightarrow “: $\oint d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = V_1 - V_1 = 0 \quad \checkmark$



„ \Leftarrow “: Annahmen: $\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 0 \quad \forall$ geschlossenen Wege C ,

C_1, C_2 Wege mit gleichen Anfangs- und Endpunkten

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \int_{C_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) - \int_{C_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \\ & = \int_{C_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) + \int_{-C_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \oint_{C_1 - C_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$



1.4 Mehrteilchen-Systeme



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

1.4 Mehrteilchen-Systeme

- ▶ N Teilchen mit Massen m_i , Koordinaten $\vec{r}^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$
 - ▶ **innere Kräfte:** $\vec{F}^{(ij)}$ = Kraft von Teilchen j auf Teilchen i
 - ▶ **äußere Kraft** auf Teilchen i : $\vec{F}_{ex}^{(i)}$
- ⇒ **Gesamtkraft** auf Teilchen i : $\vec{F}^{(i)} = \sum_{j \neq i} \vec{F}^{(ij)} + \vec{F}_{ex}^{(i)}$

1.4 Mehrteilchen-Systeme

- ▶ N Teilchen mit Massen m_i , Koordinaten $\vec{r}^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$
 - ▶ **innere Kräfte:** $\vec{F}^{(ij)}$ = Kraft von Teilchen j auf Teilchen i
 - ▶ **äußere Kraft** auf Teilchen i : $\vec{F}_{ex}^{(i)}$

⇒ **Gesamtkraft** auf Teilchen i : $\vec{F}^{(i)} = \sum_{j \neq i} \vec{F}^{(ij)} + \vec{F}_{ex}^{(i)}$

▶ **Beispiel:**

zwei durch eine Feder verbundene Massen m_1 und m_2 im Schwerfeld der Erde (Schwerebeschleunigung \vec{g})

- ▶ $\vec{F}_{ex}^{(1)} = m_1 \vec{g}$
- ▶ $\vec{F}_{ex}^{(2)} = m_2 \vec{g}$
- ▶ $\vec{F}^{(12)}$ = Federkraft auf Teilchen 1
- ▶ $\vec{F}^{(21)} = -\vec{F}^{(12)}$ = Federkraft auf Teilchen 2



- ▶ Ein System heißt **abgeschlossen**, falls $\vec{F}_{ex}^{(i)} = \vec{0} \quad \forall i$.



- ▶ Ein System heißt **abgeschlossen**, falls $\vec{F}_{ex}^{(i)} = \vec{0} \quad \forall i$.
- ▶ **Grundlegende Annahme:** Es gilt das Superpositionsprinzip N4.
 - Alle inneren Käfte sind **Zweiteilchen-Kräfte**,
d.h. sie werden nicht durch die Anwesenheit weiterer Teilchen beeinflusst.



- ▶ Ein System heißt **abgeschlossen**, falls $\vec{F}_{ex}^{(i)} = \vec{0} \quad \forall i$.
- ▶ **Grundlegende Annahme:** Es gilt das Superpositionsprinzip N4.
 - Alle inneren Käfte sind **Zweiteilchen-Kräfte**,
d.h. sie werden nicht durch die Anwesenheit weiterer Teilchen beeinflusst.
- ▶ *actio = reactio* (N3): $\vec{F}^{(ij)} = -\vec{F}^{(ji)}$



- ▶ Ein System heißt **abgeschlossen**, falls $\vec{F}_{ex}^{(i)} = \vec{0} \quad \forall i$.
- ▶ **Grundlegende Annahme:** Es gilt das Superpositionsprinzip N4.
 - Alle inneren Kräfte sind **Zweiteilchen-Kräfte**,
d.h. sie werden nicht durch die Anwesenheit weiterer Teilchen beeinflusst.
- ▶ *actio = reactio* (N3): $\vec{F}^{(ij)} = -\vec{F}^{(ji)}$
- ▶ **Def.:** **zentrale** Zweiteilchen-Kräfte
 - ▶ Richtung entlang der Verbindungslinie
 - ▶ Stärke hängt nur vom Abstand ab

$$\vec{F}^{(ij)}(\vec{r}^{(i)}, \vec{r}^{(j)}) = f^{ij}(r_{ij}) \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \quad \text{mit} \quad \vec{r}_{ij} \equiv \vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)}, \quad r_{ij} \equiv |\vec{r}_{ij}|$$



Beispiele:

- ▶ Gravitationskraft zwischen zwei Massen m_1 und m_2 :

$$\vec{F}_G^{(12)}(\vec{r}^{(1)}, \vec{r}^{(2)}) = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$



Beispiele:

- ▶ **Gravitationskraft** zwischen zwei Massen m_1 und m_2 :

$$\vec{F}_G^{(12)}(\vec{r}^{(1)}, \vec{r}^{(2)}) = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

- ▶ **Coulomb-Kraft** zwischen zwei Ladungen q_1 und q_2 :

$$\vec{F}_C^{(12)}(\vec{r}^{(1)}, \vec{r}^{(2)}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

1.4.1 Schwerpunktsatz

1.4.1 Schwerpunktsatz

Definitionen:

- ▶ Gesamtimpuls:
$$\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{p}^{(i)} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}^{(i)}$$
- ▶ gesamte äußere Kraft:
$$\vec{F}_{ex} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ex}^{(i)}$$
- ▶ Gesamtmasse:
$$M \equiv \sum_{i=1}^N m_i$$
- ▶ Schwerpunktsvektor:
$$\vec{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}^{(i)}$$

1.4.1 Schwerpunktsatz

Definitionen:

- ▶ Gesamtimpuls:
$$\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{p}^{(i)} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}^{(i)} = M \dot{\vec{R}}$$
- ▶ gesamte äußere Kraft:
$$\vec{F}_{ex} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ex}^{(i)}$$
- ▶ Gesamtmasse:
$$M \equiv \sum_{i=1}^N m_i$$
- ▶ Schwerpunktsvektor:
$$\vec{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}^{(i)}$$

1.4.1 Schwerpunktsatz

Definitionen:

- ▶ Gesamtimpuls:
$$\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{p}^{(i)} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}^{(i)} = M \dot{\vec{R}} \Rightarrow \dot{\vec{P}} = M \ddot{\vec{R}}$$
- ▶ gesamte äußere Kraft:
$$\vec{F}_{ex} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ex}^{(i)}$$
- ▶ Gesamtmasse:
$$M \equiv \sum_{i=1}^N m_i$$
- ▶ Schwerpunktsvektor:
$$\vec{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}^{(i)}$$

1.4.1 Schwerpunktsatz

Definitionen:

- ▶ Gesamtimpuls: $\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{p}^{(i)} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}^{(i)} = M \dot{\vec{R}} \Rightarrow \dot{\vec{P}} = M \ddot{\vec{R}}$
- ▶ gesamte äußere Kraft: $\vec{F}_{ex} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ex}^{(i)}$
- ▶ Gesamtmasse: $M \equiv \sum_{i=1}^N m_i$
- ▶ Schwerpunktsvektor: $\vec{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}^{(i)}$

$$\dot{\vec{p}}^{(i)} = \vec{F}^{(i)} = \sum_{j \neq i} \vec{F}^{(ij)} + \vec{F}_{ex}^{(i)}$$

1.4.1 Schwerpunktsatz

Definitionen:

▶ Gesamtimpuls:
$$\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{p}^{(i)} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}^{(i)} = M \dot{\vec{R}} \Rightarrow \dot{\vec{P}} = M \ddot{\vec{R}}$$

▶ gesamte äußere Kraft:
$$\vec{F}_{ex} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ex}^{(i)}$$

▶ Gesamtmasse:
$$M \equiv \sum_{i=1}^N m_i$$

▶ Schwerpunktsvektor:
$$\vec{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}^{(i)}$$

$$\dot{\vec{p}}^{(i)} = \vec{F}^{(i)} = \sum_{j \neq i} \vec{F}^{(ij)} + \vec{F}_{ex}^{(i)} \Rightarrow \dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}^{(i)} = \underbrace{\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \vec{F}^{(ij)}}_{=\vec{0}, \text{ da } \vec{F}^{(ij)} = -\vec{F}^{(ji)}} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ex}^{(i)} = \vec{F}_{ex}$$



$$\Rightarrow \boxed{\dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{ex}}$$

Der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob die gesamte Masse in ihm vereint wäre und alle äußeren Kräfte an ihm wirkten!



$$\Rightarrow \boxed{\dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{ex}}$$

Der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob die gesamte Masse in ihm vereint wäre und alle äußeren Kräfte an ihm wirkten!

- ▶ Grundlage für das Funktionieren des Konzepts der Punktmassen



$$\Rightarrow \boxed{\dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{ex}}$$

Der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob die gesamte Masse in ihm vereint wäre und alle äußeren Kräfte an ihm wirkten!

- ▶ Grundlage für das Funktionieren des Konzepts der Punktmassen
- ▶ abgeschlossene Systeme:

$$\vec{F}_{ex}^{(i)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{ex} = \vec{0} \Rightarrow \dot{\vec{P}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = \text{const.}$$