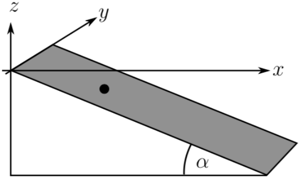
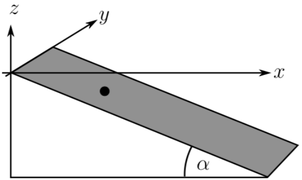
Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene



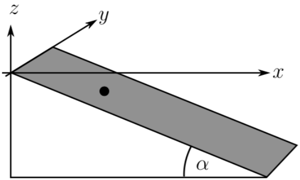
Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene



- Zwangsbedingung:

  $$z = -x \tan\alpha \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y,z) \equiv z + x \tan\alpha = 0$$

Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene



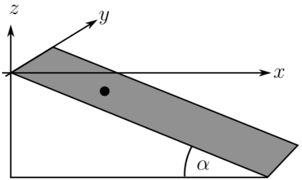
- Zwangsbedingung:

$$z = -x \tan\alpha \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y,z) \equiv z + x \tan\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- Zwangsbedingung:

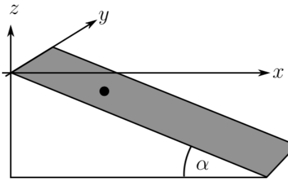
  $$z = -x \tan\alpha \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y,z) \equiv z + x \tan\alpha = 0$$

  $$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Schwerkraft: $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$, keine Reibung

Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- Zwangsbedingung:

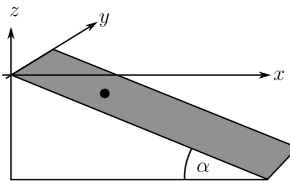
$$z = -x \tan\alpha \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y,z) \equiv z + x \tan\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Schwerkraft: $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$, keine Reibung

- Lagrange: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda\vec{\nabla} f \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcll} m\ddot{x} & = & \lambda \tan\alpha & (1) \\ m\ddot{y} & = & 0 & (2) \\ m\ddot{z} & = & -mg + \lambda & (3) \end{array} \right.$

Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene



- Zwangsbedingung:

  $$z = -x \tan\alpha \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y,z) \equiv z + x \tan\alpha = 0$$

  $$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

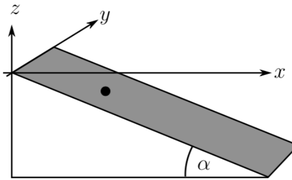
- Schwerkraft: $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$, keine Reibung

- Lagrange: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda \vec{\nabla} f \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcll} m\ddot{x} & = & \lambda \tan\alpha & (1) \\ m\ddot{y} & = & 0 & (2) \\ m\ddot{z} & = & -mg + \lambda & (3) \end{array} \right.$

- $f = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = m\ddot{f} = m\ddot{z} + m\ddot{x} \tan\alpha$

Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- Zwangsbedingung:

$$z = -x \tan\alpha \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y,z) \equiv z + x \tan\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

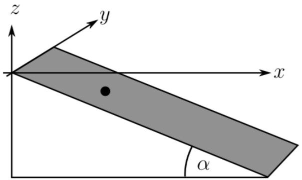
- Schwerkraft: $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$, keine Reibung

- Lagrange: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda\vec{\nabla} f \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcll} m\ddot{x} & = & \lambda \tan\alpha & (1) \\ m\ddot{y} & = & 0 & (2) \\ m\ddot{z} & = & -mg + \lambda & (3) \end{array} \right.$

- $f = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = m\ddot{f} = m\ddot{z} + m\ddot{x}\tan\alpha \overset{(1),(3)}{=} -mg + \lambda + \lambda\tan^2\alpha$

Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- Zwangsbedingung:

$$z = -x \tan\alpha \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y,z) \equiv z + x\tan\alpha = 0$$

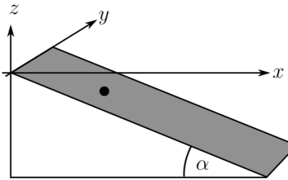
$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Schwerkraft: $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$, keine Reibung

- Lagrange: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda\vec{\nabla} f \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcll} m\ddot{x} & = & \lambda\tan\alpha & (1) \\ m\ddot{y} & = & 0 & (2) \\ m\ddot{z} & = & -mg + \lambda & (3) \end{array} \right.$

- $f = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = m\ddot{f} = m\ddot{z} + m\ddot{x}\tan\alpha \overset{(1),(3)}{=} -mg + \lambda + \lambda\tan^2\alpha = -mg + \frac{\lambda}{\cos^2\alpha}$

Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene



- **Zwangsbedingung:**

  $$z = -x\,\tan\alpha \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y,z) \equiv z + x\,\tan\alpha = 0$$

  $$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Schwerkraft:** $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$, keine Reibung

- **Lagrange:** $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda\vec{\nabla} f \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcll} m\ddot{x} & = & \lambda\tan\alpha & (1) \\ m\ddot{y} & = & 0 & (2) \\ m\ddot{z} & = & -mg + \lambda & (3) \end{array} \right.$

- $f = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = m\ddot{f} = m\ddot{z} + m\ddot{x}\,\tan\alpha \overset{(1),(3)}{=} -mg + \lambda + \lambda\tan^2\alpha \;=\; -mg + \frac{\lambda}{\cos^2\alpha}$

  $$\Rightarrow \quad \lambda = mg\cos^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_Z = \lambda\vec{\nabla} f = mg\begin{pmatrix} \cos\alpha\sin\alpha \\ 0 \\ \cos^2\alpha \end{pmatrix}$$

Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene

- Gesamtkraft:

$$\vec{F}_Z + \vec{F} = mg \begin{pmatrix} \cos\alpha \sin\alpha \\ 0 \\ \cos^2\alpha - 1 \end{pmatrix} = mg \sin\alpha \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}$$

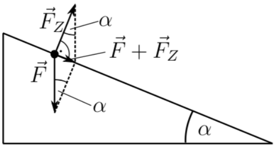
Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Gesamtkraft:

$$\vec{F}_Z + \vec{F} = mg \begin{pmatrix} \cos\alpha \sin\alpha \\ 0 \\ \cos^2\alpha - 1 \end{pmatrix} = mg \sin\alpha \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}$$

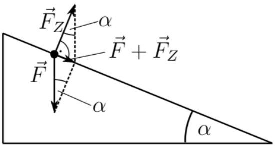
- kann man auch geometrisch konstruieren:
  Aber Lagrange ist einfacher!



Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene

- Gesamtkraft:

$$\vec{F}_Z + \vec{F} = mg \begin{pmatrix} \cos\alpha \sin\alpha \\ 0 \\ \cos^2\alpha - 1 \end{pmatrix} = mg \sin\alpha \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}$$



- kann man auch geometrisch konstruieren:
  Aber Lagrange ist einfacher!

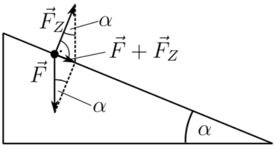
- Bewegungsgleichungen:
  - $m\ddot{x} = mg \cos\alpha \sin\alpha$
  - $m\ddot{y} = 0$
  - $m\ddot{z} = -mg \sin^2\alpha$

Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gesamtkraft:

$$\vec{F}_Z + \vec{F} = mg \begin{pmatrix} \cos\alpha \sin\alpha \\ 0 \\ \cos^2\alpha - 1 \end{pmatrix} = mg \sin\alpha \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}$$



- kann man auch geometrisch konstruieren:
  Aber Lagrange ist einfacher!

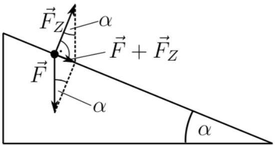
- Bewegungsgleichungen:
  - $m\ddot{x} = mg \cos\alpha \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + v_{x,0}\, t + \frac{1}{2} g \cos\alpha \sin\alpha\, t^2$
  - $m\ddot{y} = 0$
  - $m\ddot{z} = -mg \sin^2\alpha$

Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gesamtkraft:

$$\vec{F}_Z + \vec{F} = mg \begin{pmatrix} \cos\alpha \sin\alpha \\ 0 \\ \cos^2\alpha - 1 \end{pmatrix} = mg \sin\alpha \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}$$



- kann man auch geometrisch konstruieren:
  Aber Lagrange ist einfacher!

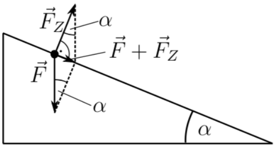
- Bewegungsgleichungen:
  - $m\ddot{x} = mg \cos\alpha \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + v_{x,0}\, t + \frac{1}{2} g \cos\alpha \sin\alpha\, t^2$
  - $m\ddot{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = y_0 + v_{y,0}\, t$
  - $m\ddot{z} = -mg \sin^2\alpha$

Beispiel: Teilchen auf schiefer Ebene

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Gesamtkraft:

$$\vec{F}_Z + \vec{F} = mg \begin{pmatrix} \cos\alpha \sin\alpha \\ 0 \\ \cos^2\alpha - 1 \end{pmatrix} = mg \sin\alpha \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}$$



- kann man auch geometrisch konstruieren:
  Aber Lagrange ist einfacher!

- Bewegungsgleichungen:
  - $m\ddot{x} = mg \cos\alpha \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + v_{x,0}\, t + \frac{1}{2} g \cos\alpha \sin\alpha\, t^2$
  - $m\ddot{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = y_0 + v_{y,0}\, t$
  - $m\ddot{z} = -mg \sin^2\alpha$

$$z(t) \overset{\text{Zwangsbed.}}{=} -x(t)\, \tan\alpha = -x_0 \tan\alpha - v_{x,0} \tan\alpha\, t - \frac{1}{2} g \sin^2\alpha\, t^2$$

4.3 Virtuelle Verrückungen und das D'Alembert'sche Prinzip

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4.3 Virtuelle Verrückungen und das D'Alembert'sche Prinzip

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- von den Zwangskräften geleistete Arbeit: $dW_Z = \vec{F}_Z \cdot d\vec{r}$

4.3 Virtuelle Verrückungen und das D'Alembert'sche Prinzip

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- von den Zwangskräften geleistete Arbeit: $dW_Z = \vec{F}_Z \cdot d\vec{r}$
- Bewegung im Einklang mit skleronomen Zwangsbedingungen: $d\vec{r} \perp \vec{F}_Z$

  $\Rightarrow \quad dW_Z = 0$ skleronome Zwangskräfte leisten keine Arbeit!

4.3 Virtuelle Verrückungen und das D'Alembert'sche Prinzip

- von den Zwangskräften geleistete Arbeit: $dW_Z = \vec{F}_Z \cdot d\vec{r}$
- Bewegung im Einklang mit skleronomen Zwangsbedingungen: $d\vec{r} \perp \vec{F}_Z$

  $\Rightarrow \quad dW_Z = 0$ skleronome Zwangskräfte leisten keine Arbeit!

- gilt nicht für rheonome Zwangsbedingungen

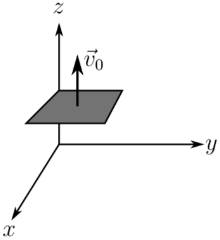
4.3 Virtuelle Verrückungen und das D'Alembert'sche Prinzip

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- von den Zwangskräften geleistete Arbeit: $dW_Z = \vec{F}_Z \cdot d\vec{r}$
- Bewegung im Einklang mit skleronomen Zwangsbedingungen: $d\vec{r} \perp \vec{F}_Z$

  $\Rightarrow \quad dW_Z = 0$ skleronome Zwangskräfte leisten keine Arbeit!

- gilt nicht für rheonome Zwangsbedingungen
- **Beispiel:** Masse am Boden eines Aufzugs
  - Zwangsbedingung: $f(z) = z - v_0 t = 0$



4.3 Virtuelle Verrückungen und das D'Alembert'sche Prinzip

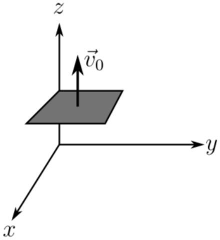
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- von den Zwangskräften geleistete Arbeit: $dW_Z = \vec{F}_Z \cdot d\vec{r}$
- Bewegung im Einklang mit skleronomen Zwangsbedingungen: $d\vec{r} \perp \vec{F}_Z$

  $\Rightarrow \quad dW_Z = 0$ skleronome Zwangskräfte leisten keine Arbeit!

- gilt nicht für rheonome Zwangsbedingungen
- **Beispiel:** Masse am Boden eines Aufzugs
  - Zwangsbedingung: $f(z) = z - v_0 t = 0$

    $$\Rightarrow \quad \vec{F}_Z = \lambda \vec{\nabla} f = \lambda \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$



4.3 Virtuelle Verrückungen und das D'Alembert'sche Prinzip

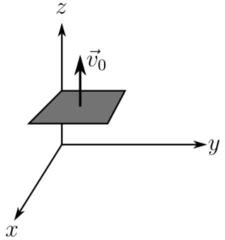
- von den Zwangskräften geleistete Arbeit: $dW_Z = \vec{F}_Z \cdot d\vec{r}$
- Bewegung im Einklang mit skleronomen Zwangsbedingungen: $d\vec{r} \perp \vec{F}_Z$

  $\Rightarrow \quad dW_Z = 0$ skleronome Zwangskräfte leisten keine Arbeit!

- gilt nicht für rheonome Zwangsbedingungen
- **Beispiel:** Masse am Boden eines Aufzugs
  - Zwangsbedingung: $f(z) = z - v_0 t = 0$

    $$\Rightarrow \quad \vec{F}_Z = \lambda \vec{\nabla} f = \lambda \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

  - $$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_0 \end{pmatrix} dt$$



4.3 Virtuelle Verrückungen und das D'Alembert'sche Prinzip

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

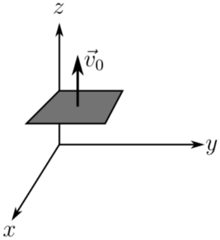
- von den Zwangskräften geleistete Arbeit: $dW_Z = \vec{F}_Z \cdot d\vec{r}$
- Bewegung im Einklang mit skleronomen Zwangsbedingungen: $d\vec{r} \perp \vec{F}_Z$

  $\Rightarrow \quad dW_Z = 0$ skleronome Zwangskräfte leisten keine Arbeit!

- gilt nicht für rheonome Zwangsbedingungen
- **Beispiel:** Masse am Boden eines Aufzugs
  - Zwangsbedingung: $f(z) = z - v_0 t = 0$

    $$\Rightarrow \quad \vec{F}_Z = \lambda \vec{\nabla} f = \lambda \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

  - $d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_0 \end{pmatrix} dt$



$$\Rightarrow \quad dW_Z = \vec{F}_Z \cdot d\vec{r} = \lambda v_0 \, dt \neq 0$$

Def.: Eine virtuelle Verrückung $\delta\vec{r}$ ist eine infinitesimale Ortsänderung im Einklang mit den Zwangsbedingungen, die (im Gegensatz zu realen Verrückungen $d\vec{r}$) instantan erfolgt, d.h. keine Zeit in Anspruch nimmt.

Def.: Eine virtuelle Verrückung $\delta\vec{r}$ ist eine infinitesimale Ortsänderung im Einklang mit den Zwangsbedingungen, die (im Gegensatz zu realen Verrückungen $d\vec{r}$) instantan erfolgt, d.h. keine Zeit in Anspruch nimmt.

- Aufzug: $\delta\vec{r} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta W_Z = \vec{F}_Z \cdot \delta\vec{r} = 0$

Def.: Eine virtuelle Verrückung $\delta\vec{r}$ ist eine infinitesimale Ortsänderung im Einklang mit den Zwangsbedingungen, die (im Gegensatz zu realen Verrückungen $d\vec{r}$) instantan erfolgt, d.h. keine Zeit in Anspruch nimmt.

- Aufzug: $\delta\vec{r} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta W_Z = \vec{F}_Z \cdot \delta\vec{r} = 0$

  Bei einer virtuellen Verrückung leisten die Zwangskräfte keine Arbeit.

- Mehrteilchen-Systeme:

  Fasse Ortsvektoren und Zwangskräfte zu $3N$-dimensionalen Vektoren zusammen:

$$\tilde{r} = \begin{pmatrix} \vec{r}^{\,(1)} \\ \vec{r}^{\,(2)} \\ \vdots \\ \vec{r}^{\,(N)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ z^{(N)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_Z = \begin{pmatrix} \vec{F}_Z^{\,(1)} \\ \vec{F}^{\,(2)} \\ \vdots \\ \vec{F}^{\,(N)} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \delta W_Z = \tilde{F}_Z \cdot \delta\tilde{r} = 0$$

- Mehrteilchen-Systeme:

  Fasse Ortsvektoren und Zwangskräfte zu $3N$-dimensionalen Vektoren zusammen:

$$\tilde{r} = \begin{pmatrix} \vec{r}^{\,(1)} \\ \vec{r}^{\,(2)} \\ \vdots \\ \vec{r}^{\,(N)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ z^{(N)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_Z = \begin{pmatrix} \vec{F}_Z^{(1)} \\ \vec{F}^{\,(2)} \\ \vdots \\ \vec{F}^{\,(N)} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \delta W_Z = \tilde{F}_Z \cdot \delta\tilde{r} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_i \vec{F}_Z^{(i)} \cdot \delta\vec{r}^{\,(i)} = 0$$

- Mehrteilchen-Systeme:

  Fasse Ortsvektoren und Zwangskräfte zu 3N-dimensionalen Vektoren zusammen:

$$\tilde{r} = \begin{pmatrix} \vec{r}^{\,(1)} \\ \vec{r}^{\,(2)} \\ \vdots \\ \vec{r}^{\,(N)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ z^{(N)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_Z = \begin{pmatrix} \vec{F}_Z^{(1)} \\ \vec{F}^{\,(2)} \\ \vdots \\ \vec{F}^{\,(N)} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \delta W_Z = \tilde{F}_Z \cdot \delta\tilde{r} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_i \vec{F}_Z^{(i)} \cdot \delta\vec{r}^{\,(i)} = 0$$

- Bewegungsgleichung für das i-te Teilchen: $\quad m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} = \vec{F}^{\,(i)} + \vec{F}_Z^{(i)}$

- Mehrteilchen-Systeme:

  Fasse Ortsvektoren und Zwangskräfte zu $3N$-dimensionalen Vektoren zusammen:

$$\tilde{r} = \begin{pmatrix} \vec{r}^{\,(1)} \\ \vec{r}^{\,(2)} \\ \vdots \\ \vec{r}^{\,(N)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ z^{(N)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_Z = \begin{pmatrix} \vec{F}_Z^{\,(1)} \\ \vec{F}^{\,(2)} \\ \vdots \\ \vec{F}^{\,(N)} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \quad \delta W_Z = \tilde{F}_Z \cdot \delta\tilde{r} = 0 \\ \Rightarrow \quad \sum_i \vec{F}_Z^{(i)} \cdot \delta\vec{r}^{\,(i)} = 0 \end{array}$$

- Bewegungsgleichung für das i-te Teilchen: $\quad m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} = \vec{F}^{\,(i)} + \vec{F}_Z^{(i)}$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)} \right) \cdot \delta\vec{r}^{\,(i)} = 0}$$

D'Alembert'sches Prinzip

Diskussion

- Manchmal ist man nur an den Bewegungsgleichungen interessiert, nicht an den Zwangskräften

  → Gibt es eine effizientere Methode als die Lagrange-Gln. 1. Art?

Diskussion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Manchmal ist man nur an den Bewegungsgleichungen interessiert, nicht an den Zwangskräften

  → Gibt es eine effizientere Methode als die Lagrange-Gln. 1. Art?

- D'Alembert'sches Prinzip: $\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)} \right) \cdot \delta \vec{r}^{\,(i)} = 0$
  - enthält die Zwangskräfte nicht explizit

Diskussion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Manchmal ist man nur an den Bewegungsgleichungen interessiert, nicht an den Zwangskräften

  → Gibt es eine effizientere Methode als die Lagrange-Gln. 1. Art?

- D'Alembert'sches Prinzip: $\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)} \right) \cdot \delta\vec{r}^{\,(i)} = 0$
  - enthält die Zwangskräfte nicht explizit
  - Zwangsbedingungen implizit über die erlaubten $\delta\vec{r}^{\,(i)}$ enthalten

Diskussion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Manchmal ist man nur an den Bewegungsgleichungen interessiert, nicht an den Zwangskräften

  → Gibt es eine effizientere Methode als die Lagrange-Gln. 1. Art?

- D'Alembert'sches Prinzip: $\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)} \right) \cdot \delta \vec{r}^{\,(i)} = 0$
  - enthält die Zwangskräfte nicht explizit
  - Zwangsbedingungen implizit über die erlaubten $\delta \vec{r}^{\,(i)}$ enthalten

- Das D'Alembert'sche Prinzip gilt für alle erlaubten $\delta \vec{r}^{\,(i)}$.

Diskussion

- Manchmal ist man nur an den Bewegungsgleichungen interessiert, nicht an den Zwangskräften

  → Gibt es eine effizientere Methode als die Lagrange-Gln. 1. Art?

- D'Alembert'sches Prinzip: $\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)} \right) \cdot \delta \vec{r}^{\,(i)} = 0$
  - enthält die Zwangskräfte nicht explizit
  - Zwangsbedingungen implizit über die erlaubten $\delta \vec{r}^{\,(i)}$ enthalten

- Das D'Alembert'sche Prinzip gilt für alle erlaubten $\delta \vec{r}^{\,(i)}$.

  → Falls alle $\delta r_j^{(i)}$ von einander unabhängig, dann: $m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)} = 0$

Diskussion

- Manchmal ist man nur an den Bewegungsgleichungen interessiert, nicht an den Zwangskräften

  → Gibt es eine effizientere Methode als die Lagrange-Gln. 1. Art?

- D'Alembert'sches Prinzip: $\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)} \right) \cdot \delta \vec{r}^{\,(i)} = 0$
  - enthält die Zwangskräfte nicht explizit
  - Zwangsbedingungen implizit über die erlaubten $\delta \vec{r}^{\,(i)}$ enthalten

- Das D'Alembert'sche Prinzip gilt für alle erlaubten $\delta \vec{r}^{\,(i)}$.

  → Falls alle $\delta r_j^{(i)}$ von einander unabhängig, dann: $m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)} = 0$

  Aber: $\delta r_j^{(i)}$ nicht unabhängig, wenn Zwangsbedingungen vorliegen

  (mehr Koordinaten als Freiheitsgrade!)

4.4 Generalisierte Koordinaten und Lagrange-Gleichungen 2. Art

4.4 Generalisierte Koordinaten und Lagrange-Gleichungen 2. Art

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- N Punktmassen, k holonome Zwangsbed. $\Rightarrow$ $s = 3N - k$ Freiheitsgrade
  - ➞ Suche s unabhängige „generalisierte Koordinaten“ $q_1, \ldots, q_s$ zur Beschreibung der Bewegung im Einklang mit den Zwangsbedingungen

4.4 Generalisierte Koordinaten und Lagrange-Gleichungen 2. Art

- N Punktmassen, k holonome Zwangsbed. $\Rightarrow$ $s = 3N - k$ Freiheitsgrade
  - → Suche s unabhängige „generalisierte Koordinaten“ $q_1, \ldots, q_s$ zur Beschreibung der Bewegung im Einklang mit den Zwangsbedingungen
- Die Wahl ist nicht eindeutig.

4.4 Generalisierte Koordinaten und Lagrange-Gleichungen 2. Art

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- N Punktmassen, k holonome Zwangsbed. $\Rightarrow$ $s = 3N - k$ Freiheitsgrade
  - → Suche s unabhängige „generalisierte Koordinaten" $q_1, \ldots, q_s$ zur Beschreibung der Bewegung im Einklang mit den Zwangsbedingungen
- Die Wahl ist nicht eindeutig.
- eine Möglichkeit: eliminiere k der $3N$ ursprünglichen Koordinaten mit Hilfe der Zwangsbedingungen

4.4 Generalisierte Koordinaten und Lagrange-Gleichungen 2. Art

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- N Punktmassen, k holonome Zwangsbed. $\Rightarrow$ $s = 3N - k$ Freiheitsgrade

  → Suche s unabhängige „generalisierte Koordinaten" $q_1, \ldots, q_s$ zur Beschreibung der Bewegung im Einklang mit den Zwangsbedingungen

- Die Wahl ist nicht eindeutig.

- eine Möglichkeit: eliminiere k der $3N$ ursprünglichen Koordinaten mit Hilfe der Zwangsbedingungen

- Eine andere Wahl ist oft zweckmäßiger.

  Beispiel: starrer Rotator mit fester Drehachse → $q = \varphi$ (Drehwinkel)

4.4 Generalisierte Koordinaten und Lagrange-Gleichungen 2. Art

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- N Punktmassen, k holonome Zwangsbed. $\Rightarrow$ $s = 3N - k$ Freiheitsgrade

  ➞ Suche s unabhängige „generalisierte Koordinaten“ $q_1, \dots, q_s$ zur Beschreibung der Bewegung im Einklang mit den Zwangsbedingungen

- Die Wahl ist nicht eindeutig.

- eine Möglichkeit: eliminiere k der $3N$ ursprünglichen Koordinaten mit Hilfe der Zwangsbedingungen

- Eine andere Wahl ist oft zweckmäßiger.

  Beispiel: starrer Rotator mit fester Drehachse ➞ $q = \varphi$ (Drehwinkel)

- „generalisierte Geschwindigkeiten“: $\dot{q}_j$

  (haben nicht notwendiger Weise die Dimension einer Geschwindigkeit)

4.4 Generalisierte Koordinaten und Lagrange-Gleichungen 2. Art

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- N Punktmassen, k holonome Zwangsbed. $\Rightarrow$ $s = 3N - k$ Freiheitsgrade

  → Suche s unabhängige „generalisierte Koordinaten“ $q_1, \ldots, q_s$ zur Beschreibung der Bewegung im Einklang mit den Zwangsbedingungen

- Die Wahl ist nicht eindeutig.

- eine Möglichkeit: eliminiere k der $3N$ ursprünglichen Koordinaten mit Hilfe der Zwangsbedingungen

- Eine andere Wahl ist oft zweckmäßiger.

  Beispiel: starrer Rotator mit fester Drehachse → $q = \varphi$ (Drehwinkel)

- „generalisierte Geschwindigkeiten“: $\dot{q}_j$

  (haben nicht notwendiger Weise die Dimension einer Geschwindigkeit)

  Beispiel: $q_j = \varphi$ (Drehwinkel) $\Rightarrow$ $\dot{q}_j = \dot{\varphi} = \omega$ (Winkelgeschwindigkeit)

- Ziel: Drücke das D'Alembert'sche Prinzip $\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)}\right) \cdot \delta\vec{r}^{\,(i)} = 0$ durch generalisierte Koordinaten und Geschwindigkeiten aus.

- Ziel: Drücke das D'Alembert'sche Prinzip $\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)}\right)\cdot\delta\vec{r}^{\,(i)} = 0$ durch generalisierte Koordinaten und Geschwindigkeiten aus.
- ursprüngliche Koordinaten = eindeutige Funktionen von q_j und t:
  $\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}^{\,(i)}(q_1, \dots, q_s, t)$

- Ziel: Drücke das D'Alembert'sche Prinzip $\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)}\right)\cdot\delta\vec{r}^{\,(i)} = 0$
  durch generalisierte Koordinaten und Geschwindigkeiten aus.
- ursprüngliche Koordinaten = eindeutige Funktionen von q_j und t:

$$\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}^{\,(i)}(q_1, \dots, q_s, t)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial\vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}\,\dot{q}_j + \frac{\partial\vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} = \dot{\vec{r}}^{\,(i)}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$$

- Ziel: Drücke das D'Alembert'sche Prinzip $\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)} \right) \cdot \delta \vec{r}^{\,(i)} = 0$
  durch generalisierte Koordinaten und Geschwindigkeiten aus.
- ursprüngliche Koordinaten = eindeutige Funktionen von q_j und t:
  $\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}^{\,(i)}(q_1, \dots, q_s, t)$

  $$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} = \dot{\vec{r}}^{\,(i)}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$$
- virtuelle Verrückungen: $\delta \vec{r}^{\,(i)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} \delta q_j$ (kein $\frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} \delta t$, da instantan: $\delta t = 0$)

- Ziel: Drücke das D'Alembert'sche Prinzip $\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} - \vec{F}^{(i)} \right) \cdot \delta\vec{r}^{(i)} = 0$

  durch generalisierte Koordinaten und Geschwindigkeiten aus.

- ursprüngliche Koordinaten = eindeutige Funktionen von q_j und t:

  $\vec{r}^{(i)} = \vec{r}^{(i)}(q_1, \ldots, q_s, t)$

  $$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^{(i)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial t} = \dot{\vec{r}}^{(i)}(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, t)$$

- virtuelle Verrückungen: $\delta\vec{r}^{(i)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \delta q_j$ (kein $\frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial t}\delta t$, da instantan: $\delta t = 0$)

- von den freien Kräften geleistete „virtuelle Arbeit":

  $$\delta W_F \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{(i)} \cdot \delta\vec{r}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{(i)} \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{(i)} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

- Ziel: Drücke das D'Alembert'sche Prinzip $\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)} \right) \cdot \delta \vec{r}^{\,(i)} = 0$

  durch generalisierte Koordinaten und Geschwindigkeiten aus.

- ursprüngliche Koordinaten = eindeutige Funktionen von q_j und t:

$$\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}^{\,(i)}(q_1, \dots, q_s, t)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} = \dot{\vec{r}}^{\,(i)}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$$

- virtuelle Verrückungen: $\delta \vec{r}^{\,(i)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} \delta q_j$ (kein $\frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} \delta t$, da instantan: $\delta t = 0$)

- von den freien Kräften geleistete „virtuelle Arbeit“:

$$\delta W_F \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{\,(i)} \cdot \delta \vec{r}^{\,(i)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{\,(i)} \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{\,(i)} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^{s} Q_j \, \delta q_j$$

mit $Q_j \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{\,(i)} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}$ „generalisierte Kräfte“

- gen. Koordinaten und gen. Geschwindigkeiten sind unabhängig von einander (d.h. alle q_j und $\dot{q}_j$ können beliebig vorgegeben werden)

- gen. Koordinaten und gen. Geschwindigkeiten sind unabhängig von einander (d.h. alle q_j und $\dot{q}_j$ können beliebig vorgegeben werden)

$$\dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}\,\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}$$

- gen. Koordinaten und gen. Geschwindigkeiten sind unabhängig von einander (d.h. alle q_j und $\dot{q}_j$ können beliebig vorgegeben werden)

$$\dot{\vec{r}}^{(i)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j}$$

- $\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = \sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial}{\partial q_\ell} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \dot{q}_\ell + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j}$

- gen. Koordinaten und gen. Geschwindigkeiten sind unabhängig von einander
  (d.h. alle q_j und $\dot{q}_j$ können beliebig vorgegeben werden)

$$\dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}\,\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}$$

- $\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} = \sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial}{\partial q_\ell}\frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}\,\dot{q}_\ell + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} \;=\; \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_\ell}\,\dot{q}_\ell + \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t}\right)$

- gen. Koordinaten und gen. Geschwindigkeiten sind unabhängig von einander (d.h. alle q_j und $\dot{q}_j$ können beliebig vorgegeben werden)

$$\dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}\, \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}$$

- $$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} = \sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial}{\partial q_\ell}\frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}\, \dot{q}_\ell + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_\ell}\, \dot{q}_\ell + \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{\partial q_j}$$

- gen. Koordinaten und gen. Geschwindigkeiten sind unabhängig von einander

  (d.h. alle q_j und $\dot{q}_j$ können beliebig vorgegeben werden)

$$\dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}\, \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}$$

- $$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} = \sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial}{\partial q_\ell}\frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}\, \dot{q}_\ell + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_\ell}\, \dot{q}_\ell + \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{\partial q_j}$$

- $$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \delta \vec{r}^{\,(i)} = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}\, \delta q_j$$

- gen. Koordinaten und gen. Geschwindigkeiten sind unabhängig von einander (d.h. alle q_j und $\dot{q}_j$ können beliebig vorgegeben werden)

$$\dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}\,\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}$$

- $$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} = \sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial}{\partial q_\ell}\frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}\,\dot{q}_\ell + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_\ell}\,\dot{q}_\ell + \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial t}\right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{\partial q_j}$$

- $$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \delta \vec{r}^{\,(i)} = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}\,\delta q_j$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} m_i \left\{ \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j}\right) - \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}^{\,(i)}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

- gen. Koordinaten und gen. Geschwindigkeiten sind unabhängig von einander
  (d.h. alle q_j und $\dot{q}_j$ können beliebig vorgegeben werden)

$$\dot{\vec{r}}^{(i)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j}$$

- $\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = \sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial}{\partial q_\ell} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \dot{q}_\ell + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_\ell} \dot{q}_\ell + \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)}}{\partial q_j}$

- $\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \delta \vec{r}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \delta q_j$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{s} m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{s} m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \delta \vec{r}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{s} m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \delta \vec{r}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{s} m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{s} \frac{m_i}{2} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)2}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)2}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \delta\vec{r}^{\,(i)} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} m_i \left\{ \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} \frac{m_i}{2} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)2}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)2}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = \sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

mit $T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}^{\,(i)^2}$ (kinetische Gesamtenergie)

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \delta\vec{r}^{\,(i)} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} m_i \left\{ \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} \frac{m_i}{2} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)2}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)2}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = \sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

mit $T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}^{\,(i)^2}$ (kinetische Gesamtenergie)

- D'Alembert'sche Prinzip: $\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)} \right) \cdot \delta\vec{r}^{\,(i)} = 0$
  - $\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \delta\vec{r}^{\,(i)} = \sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$
  - $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{\,(i)} \cdot \delta\vec{r}^{\,(i)} = \sum_{j=1}^{s} Q_j \, \delta q_j$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \delta\vec{r}^{\,(i)} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} m_i \left\{ \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} \frac{m_i}{2} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)2}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(i)2}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = \sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

mit $T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}^{\,(i)^2}$ (kinetische Gesamtenergie)

- D'Alembert'sche Prinzip: $\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} - \vec{F}^{\,(i)} \right) \cdot \delta\vec{r}^{\,(i)} = 0$
  - $\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \delta\vec{r}^{\,(i)} = \sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$
  - $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{\,(i)} \cdot \delta\vec{r}^{\,(i)} = \sum_{j=1}^{s} Q_j \, \delta q_j$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0$$

- D’Alembert’sche Prinzip in generlisierten Koordinaten:

$$\sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0$$

- D'Alembert'sche Prinzip in generlisierten Koordinaten:

$$\sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0$$

  - muss für alle δq_j gelten

- D'Alembert'sche Prinzip in generlisierten Koordinaten:

$$\sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0$$

  - muss für alle δq_j gelten
  - δq_j unabhängig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- D'Alembert'sche Prinzip in generlisierten Koordinaten:

$$\sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0$$

  - muss für alle δq_j gelten
  - δq_j unabhängig

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \qquad j = 1, \ldots, s}$$

- Konservatives Kraftfeld mit geschwindigkeitsunabhängigem Potenzial:

$$\vec{F}^{(i)} = -\vec{\nabla}^{(i)} V, \qquad V = V(\vec{r}^{(1)}, \dots, \vec{r}^{(N)})$$

- Konservatives Kraftfeld mit geschwindigkeitsunabhängigem Potenzial:

$$\vec{F}^{(i)} = -\vec{\nabla}^{(i)} V, \qquad V = V(\vec{r}^{(1)}, \ldots, \vec{r}^{(N)})$$

- generalisierte Kräfte: $Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{(i)} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}^{(i)} V \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

- Konservatives Kraftfeld mit geschwindigkeitsunabhängigem Potenzial:

$$\vec{F}^{(i)} = -\vec{\nabla}^{(i)} V, \qquad V = V(\vec{r}^{(1)}, \dots, \vec{r}^{(N)})$$

- generalisierte Kräfte: $\quad Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{(i)} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}^{(i)} V \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

- Konservatives Kraftfeld mit geschwindigkeitsunabhängigem Potenzial:

$$\vec{F}^{(i)} = -\vec{\nabla}^{(i)} V, \qquad V = V(\vec{r}^{(1)}, \ldots, \vec{r}^{(N)})$$

- generalisierte Kräfte: $Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{(i)} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}^{(i)} V \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$

- Konservatives Kraftfeld mit geschwindigkeitsunabhängigem Potenzial:

$$\vec{F}^{(i)} = -\vec{\nabla}^{(i)} V, \quad V = V(\vec{r}^{(1)}, \dots, \vec{r}^{(N)})$$

- generalisierte Kräfte: $Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{(i)} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}^{(i)} V \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$

- $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}^{(i)} V \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial \dot{q}_j} = 0$, da $\vec{r}^{(i)}$ nicht von $\dot{q}_j$ abhängt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Konservatives Kraftfeld mit geschwindigkeitsunabhängigem Potenzial:

$$\vec{F}^{(i)} = -\vec{\nabla}^{(i)} V, \qquad V = V(\vec{r}^{(1)}, \dots, \vec{r}^{(N)})$$

- generalisierte Kräfte: $\displaystyle Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{(i)} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}^{(i)} V \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$

- $\displaystyle \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}^{(i)} V \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial \dot{q}_j} = 0,$ da $\vec{r}^{(i)}$ nicht von $\dot{q}_j$ abhängt

$\Rightarrow$

Lagrange-Gleichungen 2. Art:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, \dots, s$$

$L \equiv T - V$ (Lagrange-Funktion)