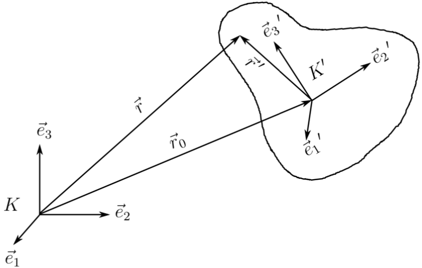
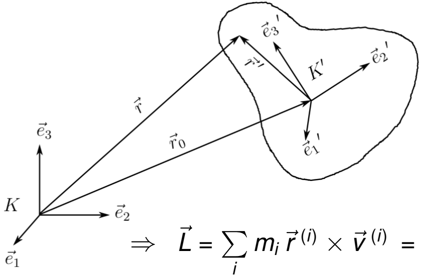
3.5 Der Drehimpuls des starren Körpers

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- Punkte des starren Körpers:
  - $\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}_0 + \vec{r}^{\,(i)\prime}$
  - $\vec{v}^{\,(i)} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}$

3.5 Der Drehimpuls des starren Körpers

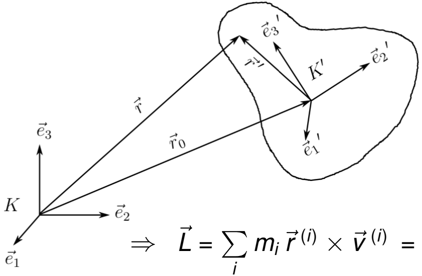


- Punkte des starren Körpers:
  - $\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}_0 + \vec{r}^{\,(i)\prime}$
  - $\vec{v}^{\,(i)} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \sum_i m_i \, \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{v}^{\,(i)} = \sum_i m_i \left(\vec{r}_0 + \vec{r}^{\,(i)\prime}\right) \times \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)$$

3.5 Der Drehimpuls des starren Körpers

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

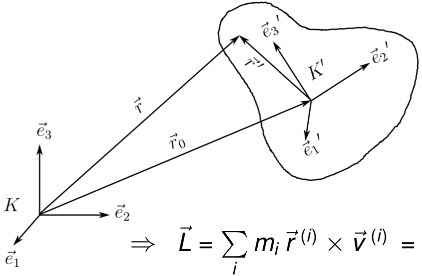


- Punkte des starren Körpers:
  - $\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}_0 + \vec{r}^{\,(i)\prime}$
  - $\vec{v}^{\,(i)} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{v}^{\,(i)} = \sum_i m_i \left(\vec{r}_0 + \vec{r}^{\,(i)\prime}\right) \times \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)$$

$$= \sum_i m_i\, \vec{r}_0 \times \vec{v}_0 + \sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)\prime} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}) + \vec{r}_0 \times \left(\vec{\omega} \times \sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)\prime}\right) + \sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)\prime} \times \vec{v}_0$$

3.5 Der Drehimpuls des starren Körpers

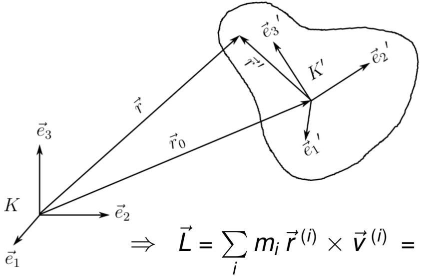


- Punkte des starren Körpers:
  - $\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}_0 + \vec{r}^{\,(i)\prime}$
  - $\vec{v}^{\,(i)} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{v}^{\,(i)} = \sum_i m_i \left(\vec{r}_0 + \vec{r}^{\,(i)\prime}\right) \times \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)$$

$$= \underbrace{\sum_i m_i\, \vec{r}_0 \times \vec{v}_0}_{\vec{L}_{\text{Bahn}}} + \underbrace{\sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)\prime} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime})}_{\vec{L}_{\text{in}}} + \underbrace{\vec{r}_0 \times \left(\vec{\omega} \times \sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)\prime}\right) + \sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)\prime} \times \vec{v}_0}_{\substack{= 0 \\ \text{(für Ursprung von } K' \text{ = Schwerpunkt)}}}$$

3.5 Der Drehimpuls des starren Körpers



- Punkte des starren Körpers:
  - $\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}_0 + \vec{r}^{\,(i)\prime}$
  - $\vec{v}^{\,(i)} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{v}^{\,(i)} = \sum_i m_i \left(\vec{r}_0 + \vec{r}^{\,(i)\prime}\right) \times \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)$$

$$= \underbrace{\sum_i m_i\, \vec{r}_0 \times \vec{v}_0}_{\vec{L}_{\text{Bahn}}} + \underbrace{\sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)\prime} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime})}_{\vec{L}_{\text{in}}} + \underbrace{\vec{r}_0 \times \left(\vec{\omega} \times \sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)\prime}\right) + \sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)\prime} \times \vec{v}_0}_{\substack{=0 \\ \text{(für Ursprung von } K' \text{ = Schwerpunkt)}}}$$

- $\vec{L}_{Bahn} = M\, \vec{r}_0 \times \vec{v}_0 \;\; \equiv \vec{R} \times \vec{P} \quad$ mit $\quad \vec{R} \equiv \vec{r}_0, \quad \vec{P} \equiv M\vec{v}_0$

- innerer Drehimpuls:

$$\vec{L}_{in} = \sum_i m_i \, \vec{r}^{\,(i)\prime} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}) = \sum_i m_i \left({\vec{r}^{\,(i)\prime}}^2 \vec{\omega} - (\vec{r}^{\,(i)\prime} \cdot \vec{\omega}) \, \vec{r}^{\,(i)\prime} \right)$$

- innerer Drehimpuls:

$$\vec{L}_{in} = \sum_i m_i \, \vec{r}^{\,(i)\prime} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}) = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime\, 2} \vec{\omega} - (\vec{r}^{\,(i)\prime} \cdot \vec{\omega}) \, \vec{r}^{\,(i)\prime} \right)$$

- α-Komponente:

$$L_{in,\alpha} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime\, 2} \omega_\alpha - \sum_\beta r_\beta^{(i)\prime} \omega_\beta \, r_\alpha^{(i)\prime} \right)$$

- innerer Drehimpuls:

$$\vec{L}_{in} = \sum_i m_i \, \vec{r}^{\,(i)\prime} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}) = \sum_i m_i \, \left(\vec{r}^{\,(i)\prime\,2} \vec{\omega} - (\vec{r}^{\,(i)\prime} \cdot \vec{\omega}) \, \vec{r}^{\,(i)\prime} \right)$$

- α-Komponente:

$$L_{in,\alpha} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime\,2} \omega_\alpha - \sum_\beta r^{(i)\prime}_\beta \omega_\beta \, r^{(i)\prime}_\alpha \right)$$

$$= \sum_\beta \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime\,2} \delta_{\alpha\beta} - r^{(i)\prime}_\alpha r^{(i)\prime}_\beta \right) \omega_\beta$$

- innerer Drehimpuls:

$$\vec{L}_{in} = \sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)\prime} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}) = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime 2} \vec{\omega} - (\vec{r}^{\,(i)\prime} \cdot \vec{\omega})\, \vec{r}^{\,(i)\prime} \right)$$

- α-Komponente:

$$L_{in,\alpha} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime 2} \omega_\alpha - \sum_\beta r_\beta^{(i)\prime} \omega_\beta\, r_\alpha^{(i)\prime} \right)$$

$$= \sum_\beta \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime 2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)\prime} r_\beta^{(i)\prime} \right) \omega_\beta \; = \sum_\beta J_{\alpha\beta}\, \omega_\beta$$

- innerer Drehimpuls:

$$\vec{L}_{in} = \sum_i m_i \, \vec{r}^{\,(i)\prime} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}) = \sum_i m_i \, \left(\vec{r}^{\,(i)\prime 2} \vec{\omega} - (\vec{r}^{\,(i)\prime} \cdot \vec{\omega}) \, \vec{r}^{\,(i)\prime} \right)$$

- α-Komponente:

$$L_{in,\alpha} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime 2} \omega_\alpha - \sum_\beta r_\beta^{(i)\prime} \omega_\beta \, r_\alpha^{(i)\prime} \right)$$

$$= \sum_\beta \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime 2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)\prime} r_\beta^{(i)\prime} \right) \omega_\beta \; = \sum_\beta J_{\alpha\beta} \, \omega_\beta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{L}_{in} = \underline{\underline{J}} \, \vec{\omega}}$$

- innerer Drehimpuls:

$$\vec{L}_{in} = \sum_i m_i \, \vec{r}^{\,(i)\prime} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}) = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime 2} \vec{\omega} - (\vec{r}^{\,(i)\prime} \cdot \vec{\omega}) \, \vec{r}^{\,(i)\prime} \right)$$

- α-Komponente:

$$L_{in,\alpha} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime 2} \omega_\alpha - \sum_\beta r_\beta^{(i)\prime} \omega_\beta \, r_\alpha^{(i)\prime} \right)$$

$$= \sum_\beta \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime 2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)\prime} r_\beta^{(i)\prime} \right) \omega_\beta \; = \sum_\beta J_{\alpha\beta} \, \omega_\beta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{L}_{in} = \underline{\underline{J}} \, \vec{\omega}}$$

- insgesamt (für Ursprung von K' = Schwerpunkt): $\boxed{\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \underline{\underline{J}} \, \vec{\omega}}$

im Folgenden: $\vec{L}_{Bahn} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{L}_{in} = \underline{\underline{J}}\,\vec{\omega}$

im Folgenden: $\vec{L}_{Bahn} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{L}_{in} = \underline{\underline{J}}\,\vec{\omega}$

- Hauptachsensystem: $\begin{pmatrix} L_\xi \\ L_\eta \\ L_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_\xi\,\omega_\xi \\ J_\eta\,\omega_\eta \\ J_\zeta\,\omega_\zeta \end{pmatrix}$

im Folgenden: $\vec{L}_{Bahn} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{L}_{in} = \underline{\underline{J}}\,\vec{\omega}$

- Hauptachsensystem: $\begin{pmatrix} L_\xi \\ L_\eta \\ L_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_\xi\,\omega_\xi \\ J_\eta\,\omega_\eta \\ J_\zeta\,\omega_\zeta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$, falls Drehachse = Hauptachse

Bsp.: $\vec{\omega} = \omega\,\vec{n}_\xi = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \begin{pmatrix} J_\xi\,\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = J_\xi\,\omega\,\vec{n}_\xi$

im Folgenden: $\vec{L}_{Bahn} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{L}_{in} = \underline{\underline{J}}\,\vec{\omega}$

- Hauptachsensystem: $\begin{pmatrix} L_\xi \\ L_\eta \\ L_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_\xi\,\omega_\xi \\ J_\eta\,\omega_\eta \\ J_\zeta\,\omega_\zeta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$, falls Drehachse = Hauptachse

Bsp.: $\vec{\omega} = \omega\,\vec{n}_\xi = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \begin{pmatrix} J_\xi\,\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = J_\xi\,\omega\,\vec{n}_\xi$

- Kugelkreisel: $J_\xi = J_\eta = J_\zeta \equiv J \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{J}} = J\,\mathbb{1}$

$\Rightarrow \quad \vec{L} = J\vec{\omega}$, d.h. $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ gilt immer für Kugelkreisel!

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

im Folgenden: $\vec{L}_{Bahn} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{L}_{in} = \underline{\underline{J}}\,\vec{\omega}$

- Hauptachsensystem: $\begin{pmatrix} L_\xi \\ L_\eta \\ L_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_\xi\,\omega_\xi \\ J_\eta\,\omega_\eta \\ J_\zeta\,\omega_\zeta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$, falls Drehachse = Hauptachse

Bsp.: $\vec{\omega} = \omega\,\vec{n}_\xi = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \begin{pmatrix} J_\xi\,\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = J_\xi\,\omega\,\vec{n}_\xi$

- Kugelkreisel: $J_\xi = J_\eta = J_\zeta \equiv J \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{J}} = J\,\mathbb{1}$

$\Rightarrow \quad \vec{L} = J\vec{\omega}$, d.h. $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ gilt immer für Kugelkreisel!

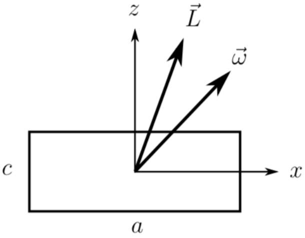
Allerdings ist für Kugelkreisel auch jede Achse eine Hauptachse:

$\underline{\underline{J}}' = \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{D}}^T = \underline{\underline{D}}\,(J\mathbb{1})\,\underline{\underline{D}}^T = J\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{D}}^T = J\mathbb{1} = \underline{\underline{J}}$

Allgemeiner Fall: $\vec{\mathbf{L}} \nparallel \vec{\omega}$

Allgemeiner Fall: $\vec{\mathbf{L}} \nparallel \vec{\omega}$

- **Bsp.:** Quader



Anfangsbedingungen ($t = 0$):

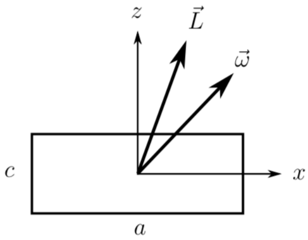
- Hauptträgheitsachsen $\parallel$ zu Achsen von K:
  $\vec{n}_\xi = \vec{e}_x,\ \vec{n}_\eta = \vec{e}_y,\ \vec{n}_\zeta = \vec{e}_z$
- Rotationsachse in der x-z-Ebene: $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{L} = \begin{pmatrix} J_\xi\, \omega_x \\ 0 \\ J_\zeta\, \omega_z \end{pmatrix}, \quad J_\xi = \frac{M}{12}(c^2 + b^2), \quad J_\zeta = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$$

Allgemeiner Fall: $\vec{L} \nparallel \vec{\omega}$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- **Bsp.:** Quader



Anfangsbedingungen ($t = 0$):

- Hauptträgheitsachsen $\parallel$ zu Achsen von K:

  $\vec{n}_\xi = \vec{e}_x, \ \vec{n}_\eta = \vec{e}_y, \ \vec{n}_\zeta = \vec{e}_z$

- Rotationsachse in der x-z-Ebene: $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}$

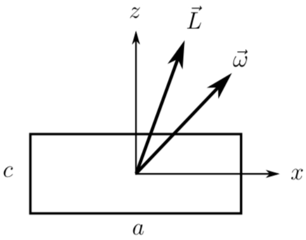
$$\Rightarrow \vec{L} = \begin{pmatrix} J_\xi \, \omega_x \\ 0 \\ J_\zeta \, \omega_z \end{pmatrix}, \quad J_\xi = \frac{M}{12}(c^2 + b^2), \quad J_\zeta = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$$

- Folge der Rotation: körperfeste Hauptachsen drehen sich von den raumfesten Koordinatenachsen weg $\Rightarrow$ $\underline{\underline{J}}$ ändert sich!

Allgemeiner Fall: $\vec{L} \nparallel \vec{\omega}$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- **Bsp.:** Quader



Anfangsbedingungen ($t = 0$):

- Hauptträgheitsachsen $\parallel$ zu Achsen von K:
  $\vec{n}_\xi = \vec{e}_x, \ \vec{n}_\eta = \vec{e}_y, \ \vec{n}_\zeta = \vec{e}_z$
- Rotationsachse in der x-z-Ebene: $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{L} = \begin{pmatrix} J_\xi \, \omega_x \\ 0 \\ J_\zeta \, \omega_z \end{pmatrix}, \quad J_\xi = \frac{M}{12}(c^2 + b^2), \quad J_\zeta = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$$

- Folge der Rotation: körperfeste Hauptachsen drehen sich von den raumfesten Koordinatenachsen weg $\Rightarrow$ $\underline{\underline{J}}$ ändert sich!

- Fall 1: $\vec{\omega} = const.$ $\Rightarrow$ $\vec{L} = \underline{\underline{J}}\vec{\omega}$ ändert sich
  $\Rightarrow$ äußeres Drehmoment erforderlich

- Fall 2: kein äußeres Drehmoment

  $\Rightarrow \quad \vec{L} = \underline{\underline{J}}\vec{\omega} = const. \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}$ ändert sich! („Nutation“)

- Fall 2: kein äußeres Drehmoment

  $\Rightarrow \quad \vec{L} = \underline{\underline{J}}\vec{\omega} = const. \quad \Rightarrow$ $\vec{\omega}$ ändert sich! („Nutation“)

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\underline{\underline{J}}}\,\vec{\omega} + \underline{\underline{J}}\,\dot{\vec{\omega}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{\omega}} = -\underline{\underline{J}}^{-1}\,\dot{\underline{\underline{J}}}\,\vec{\omega}$$

- <u>Fall 2:</u> kein äußeres Drehmoment

  $\Rightarrow \quad \vec{L} = \underline{\underline{J}}\vec{\omega} = const. \quad \Rightarrow$ $\vec{\omega}$ ändert sich! („Nutation“)

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\underline{\underline{J}}}\,\vec{\omega} + \underline{\underline{J}}\,\dot{\vec{\omega}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{\omega}} = -\underline{\underline{J}}^{-1}\,\dot{\underline{\underline{J}}}\,\vec{\omega}$$

$J = J(\vec{\omega})$, $\dot{J} = \dot{J}(\vec{\omega}, \dot{\vec{\omega}})$ $\rightarrow$ i.A. komplizierte Bewegung

- Fall 2: kein äußeres Drehmoment

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \underline{\underline{J}}\vec{\omega} = const. \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} \text{ ändert sich!} \quad \text{(„Nutation“)}$$

$$\dot{\vec{L}} = \underline{\underline{\dot{J}}}\,\vec{\omega} + \underline{\underline{J}}\,\dot{\vec{\omega}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{\omega}} = -\underline{\underline{J}}^{-1}\,\underline{\underline{\dot{J}}}\,\vec{\omega}$$

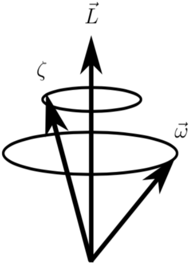
$J = J(\vec{\omega})$, $\dot{J} = \dot{J}(\vec{\omega}, \dot{\vec{\omega}})$ ➞ i.A. komplizierte Bewegung

- Symmetrischer Kreisel (z.B. $J_\xi = J_\eta \neq J_\zeta$)

  Bewegungsgleichung analytisch lösbar:

  $\vec{L}$, $\vec{\omega}$ und die ζ-Richtung (“Figurenachse“) liegen stets in einer Ebene, die periodisch um $\vec{L}$ rotiert.

  ➞ „Nutationskegel“



4. Lagrange-Mechanik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4.1 Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

4.1 Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- N Punktmassen:
  - Bewegungsgleichungen: $m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} = \vec{F}^{\,(i)}, \quad i = 1, \ldots, N$
  - Zahl der Freiheitsgrade: $s = 3N$

→ $3N$ gekoppelte Differenzialgln. 2. Ordnung

- Zwangsbedingungen = geometrische Einschänkungen der Bewegung

→ $s \leq 3N$

4.1 Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

- N Punktmassen:
  - Bewegungsgleichungen: $m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} = \vec{F}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N$
  - Zahl der Freiheitsgrade: $s = 3N$

  → $3N$ gekoppelte Differenzialgln. 2. Ordnung

- Zwangsbedingungen = geometrische Einschänkungen der Bewegung

  → $s \leq 3N$

  Beispiele:
  - starrer Körper: $s = 6$
  - Rotator mit fester Achse: $s = 1$ (Drehwinkel φ)

4.1 Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- N Punktmassen:
  - Bewegungsgleichungen: $m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} = \vec{F}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N$
  - Zahl der Freiheitsgrade: $s = 3N$

  $\rightarrow$ $3N$ gekoppelte Differenzialgln. 2. Ordnung

- Zwangsbedingungen = geometrische Einschänkungen der Bewegung

  $\rightarrow$ $s \leq 3N$

  Beispiele:
  - starrer Körper: $s = 6$
  - Rotator mit fester Achse: $s = 1$ (Drehwinkel φ)

- Zwangskräfte = Kräfte, die die Zwangsbedingungen bewirken

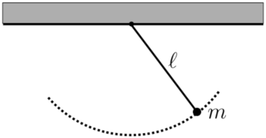
Weitere Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- mathematisches Pendel:
  - $(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = \ell^2, \quad \vec{r}_0$ = Aufhängepunkt

    → Bewegung von *m* auf Kugeloberfläche

    → zwei Freiheitsgrade
  - Zwangskraft durch den Faden

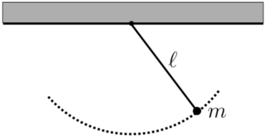


Weitere Beispiele

- mathematisches Pendel:
  - $(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = \ell^2, \quad \vec{r}_0$ = Aufhängepunkt

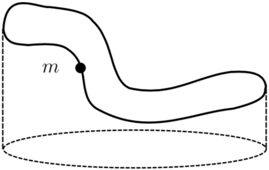
    → Bewegung von m auf Kugeloberfläche

    → zwei Freiheitsgrade
  - Zwangskraft durch den Faden



- Achterbahn:
  - Bewegung auf vorgegebener Bahnkurve $\mathcal{C}$

    → ein Freiheitsgrad (= Bahnparameter, z.B. zurückgelegte Wegstrecke)
  - Zwangskraft durch die Schienen



Klassifizierung von Zwangsbedingungen

Klassifizierung von Zwangsbedingungen

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- holonome Zwangsbedingungen
  = Zwangsbedingungen in der Form $f_i(\vec{r}^{\,(1)}, \vec{r}^{\,(2)}, \ldots, \vec{r}^{\,(N)}, t) = 0$

Klassifizierung von Zwangsbedingungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- holonome Zwangsbedingungen

  = Zwangsbedingungen in der Form $\quad f_i(\vec{r}^{\,(1)}, \vec{r}^{\,(2)}, \ldots, \vec{r}^{\,(N)}, t) = 0$

  - k unabhängige holonome Zwangsbed. $\quad f_i = 0, \; i = 1, \ldots, k$

    $\rightarrow \; s = 3N - k$ Freiheitsgrade

Klassifizierung von Zwangsbedingungen

- holonome Zwangsbedingungen

  = Zwangsbedingungen in der Form $f_i(\vec{r}^{\,(1)}, \vec{r}^{\,(2)}, \dots, \vec{r}^{\,(N)}, t) = 0$

  - k unabhängige holonome Zwangsbed. $f_i = 0, \;\; i = 1, \dots, k$

    $\rightarrow \; s = 3N - k$ Freiheitsgrade

  weitere Unterteilung:

  - skleronome Zwangsbedingungen: $\frac{\partial f_i}{\partial t} = 0$, d.h. nicht explizit zeitabh.
  - rheonome Zwangsbedingungen: explizit zeitabhängig

Klassifizierung von Zwangsbedingungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- holonome Zwangsbedingungen

  = Zwangsbedingungen in der Form $\quad f_i(\vec{r}^{\,(1)}, \vec{r}^{\,(2)}, \ldots, \vec{r}^{\,(N)}, t) = 0$

  - k unabhängige holonome Zwangsbed. $\quad f_i = 0, \;\; i = 1, \ldots, k$

    $\rightarrow \; s = 3N - k$ Freiheitsgrade

  weitere Unterteilung:

  - skleronome Zwangsbedingungen: $\frac{\partial f_i}{\partial t} = 0$, d.h. nicht explizit zeitabh.
  - rheonome Zwangsbedingungen: explizit zeitabhängig

- nicht-holonome Zwangsbedingungen:

  schränken die Bewegung ein, reduzieren aber nicht die Zahl der Freiheitsgrade

Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- mathematisches Pendel: $(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = \ell^2$

  ➞ $k = 1$ holonome Zwangsbedingung: $f(\vec{r}) \equiv (\vec{r} - \vec{r}_0)^2 - \ell^2 = 0$

  $\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial t} = 0$ ➞ skleronom

  $N = 1$ Teilchen $\quad \Rightarrow \quad s = 3 - 1 = 2$ Freiheitsgrade ✓

Beispiele

- mathematisches Pendel: $(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = \ell^2$

  ➞ $k = 1$ holonome Zwangsbedingung: $f(\vec{r}) \equiv (\vec{r} - \vec{r}_0)^2 - \ell^2 = 0$

  $\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial t} = 0$ ➞ skleronom

  $N = 1$ Teilchen $\quad \Rightarrow \quad s = 3 - 1 = 2$ Freiheitsgrade $\checkmark$

- Pendel mit zeitabhängigem Aufhängepunkt: z.B. $\vec{r}_0(t) = A\cos(\omega t)\,\vec{e}_z$

  ➞ holonome rheonome Zwangsbedingung: $f(\vec{r}, t) \equiv (\vec{r} - \vec{r}_0(t))^2 - \ell^2 = 0$

  nach wie vor: $N = 1,\ k = 1 \quad \Rightarrow \quad s = 3 - 1 = 2$

Beispiele

- mathematisches Pendel: $(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = \ell^2$

  $\longrightarrow$ $k = 1$ holonome Zwangsbedingung: $f(\vec{r}) \equiv (\vec{r} - \vec{r}_0)^2 - \ell^2 = 0$

  $\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial t} = 0 \longrightarrow$ skleronom

  $N = 1$ Teilchen $\quad \Rightarrow \quad s = 3 - 1 = 2$ Freiheitsgrade $\checkmark$

- Pendel mit zeitabhängigem Aufhängepunkt: z.B. $\vec{r}_0(t) = A\cos(\omega t)\,\vec{e}_z$

  $\longrightarrow$ holonome rheonome Zwangsbedingung: $f(\vec{r}, t) \equiv (\vec{r} - \vec{r}_0(t))^2 - \ell^2 = 0$

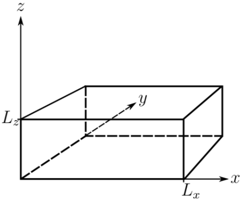
  nach wie vor: $N = 1,\ k = 1 \quad \Rightarrow \quad s = 3 - 1 = 2$

- N Teilchen im Kasten:

  $$0 < x < L_x, \quad 0 < y < L_y, \quad 0 < z < L_z$$

  = nicht-holonome Zwangsbedingungen

  $\longrightarrow$ unverändert $s = 3N$



4.2 Die Lagrange-Gleichungen 1. Art

4.2 Die Lagrange-Gleichungen 1. Art

- Teilchen auf einer Fläche (i.A. gekrümmt, zeitabhängig)

  → holonome Zwangsbedingung $f(\vec{r}, t) = 0$ → Zwangskraft $\vec{F}_Z$

4.2 Die Lagrange-Gleichungen 1. Art

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Teilchen auf einer Fläche (i.A. gekrümmt, zeitabhängig)

  $\rightarrow$ holonome Zwangsbedingung $f(\vec{r}, t) = 0$ $\rightarrow$ Zwangskraft $\vec{F}_Z$

  \+ „freie“ äußere Kraft $\vec{F}$ $\Rightarrow$ Bewegungsgleichung: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_Z$

4.2 Die Lagrange-Gleichungen 1. Art

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Teilchen auf einer Fläche (i.A. gekrümmt, zeitabhängig)

  $\rightarrow$ holonome Zwangsbedingung $f(\vec{r}, t) = 0$ $\rightarrow$ Zwangskraft $\vec{F}_Z$

  + „freie" äußere Kraft $\vec{F}$ $\Rightarrow$ Bewegungsgleichung: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_Z$

- Problem: $\vec{F}_Z$ zunächst unbekannt

4.2 Die Lagrange-Gleichungen 1. Art

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Teilchen auf einer Fläche (i.A. gekrümmt, zeitabhängig)

  $\rightarrow$ holonome Zwangsbedingung $f(\vec{r}, t) = 0$ $\rightarrow$ Zwangskraft $\vec{F}_Z$

  + „freie" äußere Kraft $\vec{F}$ $\Rightarrow$ Bewegungsgleichung: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_Z$
- Problem: $\vec{F}_Z$ zunächst unbekannt
- Eigenschaft $\vec{F}_Z$ beeinflusst die Bewegung auf der Fläche nicht

4.2 Die Lagrange-Gleichungen 1. Art

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Teilchen auf einer Fläche (i.A. gekrümmt, zeitabhängig)

  → holonome Zwangsbedingung $f(\vec{r}, t) = 0$ → Zwangskraft $\vec{F}_Z$

  + „freie" äußere Kraft $\vec{F}$ $\Rightarrow$ Bewegungsgleichung: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_Z$

- Problem: $\vec{F}_Z$ zunächst unbekannt

- Eigenschaft $\vec{F}_Z$ beeinflusst die Bewegung auf der Fläche nicht

  $\Rightarrow$ $\vec{F}_Z \perp$ Fläche

4.2 Die Lagrange-Gleichungen 1. Art

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Teilchen auf einer Fläche (i.A. gekrümmt, zeitabhängig)

  → holonome Zwangsbedingung $f(\vec{r}, t) = 0$ → Zwangskraft $\vec{F}_Z$

  + „freie“ äußere Kraft $\vec{F}$ $\Rightarrow$ Bewegungsgleichung: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_Z$

- Problem: $\vec{F}_Z$ zunächst unbekannt

- Eigenschaft $\vec{F}_Z$ beeinflusst die Bewegung auf der Fläche nicht

  $\Rightarrow$ $\vec{F}_Z \perp$ Fläche

- Behauptung: $\vec{\nabla} f(\vec{r}, t) \perp$ Fläche

4.2 Die Lagrange-Gleichungen 1. Art

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Teilchen auf einer Fläche (i.A. gekrümmt, zeitabhängig)

  ➞ holonome Zwangsbedingung $f(\vec{r}, t) = 0$ ➞ Zwangskraft $\vec{F}_Z$

  + „freie" äußere Kraft $\vec{F}$ $\Rightarrow$ Bewegungsgleichung: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_Z$

- Problem: $\vec{F}_Z$ zunächst unbekannt

- Eigenschaft $\vec{F}_Z$ beeinflusst die Bewegung auf der Fläche nicht

  $\Rightarrow$ $\vec{F}_Z \perp$ Fläche

- Behauptung: $\vec{\nabla} f(\vec{r}, t) \perp$ Fläche

  Bew.: Änderung von f bei infinitesimaler Änderung von $\vec{r}$ und t:

$$df = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial r_i} dr_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

4.2 Die Lagrange-Gleichungen 1. Art

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Teilchen auf einer Fläche (i.A. gekrümmt, zeitabhängig)

  $\rightarrow$ holonome Zwangsbedingung $f(\vec{r}, t) = 0$ $\rightarrow$ Zwangskraft $\vec{F}_Z$

  + „freie" äußere Kraft $\vec{F}$ $\Rightarrow$ Bewegungsgleichung: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_Z$

- Problem: $\vec{F}_Z$ zunächst unbekannt

- Eigenschaft $\vec{F}_Z$ beeinflusst die Bewegung auf der Fläche nicht

  $\Rightarrow$ $\vec{F}_Z \perp$ Fläche

- Behauptung: $\vec{\nabla} f(\vec{r}, t) \perp$ Fläche

  Bew.: Änderung von f bei infinitesimaler Änderung von $\vec{r}$ und t:

  $$df = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial r_i} dr_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

  Verschiebung $d\vec{r}$ auf der Fläche $f = 0$ ($\Rightarrow$ $df = 0$) zu fester Zeit ($dt = 0$)

  $$\Rightarrow \quad df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} f(\vec{r}, t) \perp \text{Fläche} \quad \checkmark$$

→ Ansatz für die Zwangskraft: $\vec{F}_Z = \lambda \vec{\nabla} f, \quad \lambda$: unbestimmter Parameter

→ Ansatz für die Zwangskraft: $\vec{F}_Z = \lambda \vec{\nabla} f, \quad \lambda$: unbestimmter Parameter

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \text{Bewegungsgl.:} & m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda \vec{\nabla} f & \text{(3 Gln.)} \\ \text{Zwangsbed.:} & f = 0 & \text{(1 Gleichung)} \end{array} \right\} \text{4 Gln. für } x, y, z, \lambda$$

→ Ansatz für die Zwangskraft: $\vec{F}_Z = \lambda \vec{\nabla} f$, λ: unbestimmter Parameter

$$\Rightarrow \left. \begin{cases} \text{Bewegungsgl.:} \quad m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda\vec{\nabla} f & \text{(3 Gln.)} \\ \text{Zwangsbed.:} \quad f = 0 & \text{(1 Gleichung)} \end{cases} \right\} \text{4 Gln. für } x, y, z, \lambda$$

- Bewegung auf einer Kurve im Raum

  → 2 Zwangsbedingungen $f_i(\vec{r}, t) = 0$, $i = 1, 2$

→ Ansatz für die Zwangskraft: $\vec{F}_Z = \lambda \vec{\nabla} f, \quad \lambda$: unbestimmter Parameter

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \text{Bewegungsgl.:} & m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda\vec{\nabla} f & \text{(3 Gln.)} \\ \text{Zwangsbed.:} & f = 0 & \text{(1 Gleichung)} \end{array} \right\} \text{4 Gln. für} x, y, z, \lambda$$

- Bewegung auf einer Kurve im Raum

→ 2 Zwangsbedingungen $f_i(\vec{r}, t) = 0, \quad i = 1, 2$

$$\vec{F}_Z \perp \text{Kurve} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_Z = \lambda_1 \vec{\nabla} f_1 + \lambda_2 \vec{\nabla} f_2,$$

→ Ansatz für die Zwangskraft: $\vec{F}_Z = \lambda \vec{\nabla} f, \quad \lambda$: unbestimmter Parameter

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} \text{Bewegungsgl.:} \quad m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda \vec{\nabla} f & \text{(3 Gln.)} \\ \text{Zwangsbed.:} \quad f = 0 & \text{(1 Gleichung)} \end{cases}\right\} \text{4 Gln. für } x, y, z, \lambda$$

- Bewegung auf einer Kurve im Raum

  → 2 Zwangsbedingungen $f_i(\vec{r}, t) = 0, \quad i = 1, 2$

$$\vec{F}_Z \perp \text{Kurve} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_Z = \lambda_1 \vec{\nabla} f_1 + \lambda_2 \vec{\nabla} f_2,$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F} + \lambda_1 \vec{\nabla} f_1 + \lambda_2 \vec{\nabla} f_2 \\ f_1 &= 0 \\ f_2 &= 0 \end{cases}\right\} \text{5 Gln. für } x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$$

- N Punktmassen m_i,
  k unabhängige Zwangsbedingungen $\quad f_j(\vec{r}^{\,(1)}, \dots, \vec{r}^{\,(N)}, t) = 0, \quad j = 1, \dots, k$

$$\Rightarrow \quad \boxed{m_i \, \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} = \vec{F}^{\,(i)} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{\nabla}^{\,(i)} f_j, \qquad i = 1, \dots, N}$$

„Lagrange-Gleichungen 1. Art“

λ_j: „Lagrange-Parameter“, „Lagrange-Multiplikatoren“