3.4 Der Trägheitstensor

3.4 Der Trägheitstensor

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- kinetische Energie des starren Körpers:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \, \vec{v}^{\,(i)\,2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \, \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2 = T_{trans} + T_{rot} + T_{mix}$$

3.4 Der Trägheitstensor

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- kinetische Energie des starren Körpers:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \, \vec{v}^{\,(i)2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \, \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2 = T_{trans} + T_{rot} + T_{mix}$$

  - $T_{trans} = \frac{1}{2} M \vec{v}_0^{\,2}$

3.4 Der Trägheitstensor

- kinetische Energie des starren Körpers:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, \vec{v}^{\,(i)^2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2 = T_{trans} + T_{rot} + T_{mix}$$

  - $T_{trans} = \frac{1}{2} M \vec{v}_0^{\,2}$
  - $T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2$

3.4 Der Trägheitstensor

- kinetische Energie des starren Körpers:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, \vec{v}^{\,(i)2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2 = T_{trans} + T_{rot} + T_{mix}$$

  - $T_{trans} = \frac{1}{2} M \vec{v}_0^{\,2}$
  - $T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2$
  - $T_{mix} = \vec{v}_0 \cdot \left(\vec{\omega} \times \sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)$

3.4 Der Trägheitstensor

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- kinetische Energie des starren Körpers:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, \vec{v}^{\,(i)2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2 = T_{trans} + T_{rot} + T_{mix}$$

  - $T_{trans} = \frac{1}{2} M \vec{v}_0^{\,2}$
  - $T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2$
  - $T_{mix} = \vec{v}_0 \cdot \left(\vec{\omega} \times \sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)\prime}\right) = 0$, wenn $\vec{r}_0$ = Schwerpunktsvektor

3.4 Der Trägheitstensor

- kinetische Energie des starren Körpers:

  $$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \, \vec{v}^{\,(i)2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \, \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2 = T_{trans} + T_{rot} + T_{mix}$$

  - $T_{trans} = \frac{1}{2} M \vec{v}_0^{\,2}$
  - $T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \, \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2$
  - $T_{mix} = \vec{v}_0 \cdot \left(\vec{\omega} \times \sum_i m_i \, \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)$ $= 0$, wenn $\vec{r}_0 =$ Schwerpunktsvektor
- $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2}\, \vec{b}^{\,2} - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

3.4 Der Trägheitstensor

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- kinetische Energie des starren Körpers:

  $$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \, \vec{v}^{\,(i)2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \, \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2 = T_{trans} + T_{rot} + T_{mix}$$

  - $T_{trans} = \frac{1}{2} M \vec{v}_0^{\,2}$
  - $T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \, \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2$
  - $T_{mix} = \vec{v}_0 \cdot \left(\vec{\omega} \times \sum_i m_i \, \vec{r}^{\,(i)\prime}\right) \quad = 0$, wenn $\vec{r}_0$ = Schwerpunktsvektor

- $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2}\, \vec{b}^{\,2} - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

  $$\Rightarrow \quad T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left[\vec{\omega}^{\,2}\, \vec{r}^{\,(i)\prime\, 2} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}^{\,(i)\prime})^2\right]$$

3.4 Der Trägheitstensor

- kinetische Energie des starren Körpers:

  $$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, \vec{v}^{\,(i)2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2 = T_{trans} + T_{rot} + T_{mix}$$

  - $T_{trans} = \frac{1}{2} M \vec{v}_0^{\,2}$
  - $T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, \left(\vec{\omega}\times\vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2$
  - $T_{mix} = \vec{v}_0\cdot\left(\vec{\omega}\times\sum_i m_i\,\vec{r}^{\,(i)\prime}\right) \quad = 0$, wenn $\vec{r}_0$ = Schwerpunktsvektor

- $(\vec{a}\times\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2}\,\vec{b}^{\,2} - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

  $$\Rightarrow \quad T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left[\vec{\omega}^{\,2}\,\vec{r}^{\,(i)\prime\,2} - (\vec{\omega}\cdot\vec{r}^{\,(i)\prime})^2\right]$$

  $$= \frac{1}{2}\sum_i m_i\left[\vec{r}^{\,(i)\prime\,2}\sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha^2 - \sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha\, r_\alpha^{(i)\prime}\sum_{\beta=1}^{3}\omega_\beta\, r_\beta^{(i)\prime}\right]$$

3.4 Der Trägheitstensor

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- kinetische Energie des starren Körpers:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, \vec{v}^{\,(i)2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2 = T_{trans} + T_{rot} + T_{mix}$$

  - $T_{trans} = \frac{1}{2} M \vec{v}_0^{\,2}$
  - $T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, \left(\vec{\omega}\times\vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2$
  - $T_{mix} = \vec{v}_0 \cdot \left(\vec{\omega}\times\sum_i m_i\, \vec{r}^{\,(i)\prime}\right) \quad = 0$, wenn $\vec{r}_0$ = Schwerpunktsvektor

- $(\vec{a}\times\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2}\,\vec{b}^{\,2} - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

$$\Rightarrow \quad T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left[\vec{\omega}^{\,2}\, \vec{r}^{\,(i)\prime\,2} - (\vec{\omega}\cdot\vec{r}^{\,(i)\prime})^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left[\vec{r}^{\,(i)\prime\,2} \sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha^2 - \sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha\, r_\alpha^{(i)\prime} \sum_{\beta=1}^{3}\omega_\beta\, r_\beta^{(i)\prime}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\left[\sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime\,2}\delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)\prime} r_\beta^{(i)\prime}\right)\right]\omega_\alpha\omega_\beta$$

3.4 Der Trägheitstensor

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- kinetische Energie des starren Körpers:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \, \vec{v}^{\,(i)^2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \, \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2 = T_{trans} + T_{rot} + T_{mix}$$

  - $T_{trans} = \frac{1}{2} M \vec{v}_0^{\,2}$
  - $T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \, \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)\prime}\right)^2$
  - $T_{mix} = \vec{v}_0 \cdot \left(\vec{\omega} \times \sum_i m_i \, \vec{r}^{\,(i)\prime}\right) \quad = 0$, wenn $\vec{r}_0$ = Schwerpunktsvektor

- $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} \, \vec{b}^{\,2} - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

$$\Rightarrow \quad T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left[\vec{\omega}^{\,2} \, \vec{r}^{\,(i)\prime\,2} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}^{\,(i)\prime})^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left[\vec{r}^{\,(i)\prime\,2} \sum_{\alpha=1}^{3} \omega_\alpha^2 - \sum_{\alpha=1}^{3} \omega_\alpha \, r_\alpha^{(i)\prime} \sum_{\beta=1}^{3} \omega_\beta \, r_\beta^{(i)\prime}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \left[\sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime\,2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)\prime} r_\beta^{(i)\prime}\right)\right] \omega_\alpha \omega_\beta \quad \equiv \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J_{\alpha\beta} \, \omega_\alpha \omega_\beta$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J_{\alpha\beta}\, \omega_\alpha \omega_\beta} \quad \text{mit} \quad J_{\alpha\beta} \equiv \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime\,2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)\prime} r_\beta^{(i)\prime} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J_{\alpha\beta}\, \omega_\alpha \omega_\beta} \quad \text{mit} \quad J_{\alpha\beta} \equiv \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime\, 2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)\prime} r_\beta^{(i)\prime} \right)$$

- $\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}$ Trägheitstensor

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J_{\alpha\beta}\,\omega_\alpha\omega_\beta} \quad \text{mit} \quad J_{\alpha\beta} \equiv \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime\,2}\delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)\prime} r_\beta^{(i)\prime}\right)$$

- $\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}$ Trägheitstensor

$$\Rightarrow \quad T_{rot} = \tfrac{1}{2}\vec{\omega}^T \underline{\underline{J}}\,\vec{\omega}, \qquad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega}^T = (\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J_{\alpha\beta}\, \omega_\alpha \omega_\beta} \quad \text{mit} \quad J_{\alpha\beta} \equiv \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)\prime\,2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)\prime} r_\beta^{(i)\prime} \right)$$

- $\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}$ Trägheitstensor

$$\Rightarrow \quad T_{rot} = \tfrac{1}{2} \vec{\omega}^{\,T} \underline{\underline{J}}\, \vec{\omega}, \qquad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega}^{\,T} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

- kontinuierliche Dichteverteilung: $J_{\alpha\beta} = \int d^3r'\, \rho(\vec{r}\,')\left(\vec{r}\,'^{\,2} \delta_{\alpha\beta} - r'_\alpha r'_\beta \right)$

Eigenschaften des Trägheitstensors

- symmetrisch: $J_{\alpha\beta} = J_{\beta\alpha} \quad \Rightarrow \quad$ 6 unabhängige Komponenten

Eigenschaften des Trägheitstensors

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- symmetrisch: $J_{\alpha\beta} = J_{\beta\alpha} \quad \Rightarrow$ 6 unabhängige Komponenten
- Rotation um die α-Achse: $\omega_\beta = \omega\,\delta_{\beta\alpha} = \begin{cases} \omega & \text{falls } \beta = \alpha \\ 0 & \text{"} \quad \beta \neq \alpha \end{cases}$

(z.B. $\alpha = 3 \;\Rightarrow\; \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$)

$\Rightarrow \quad T_{rot} = \frac{1}{2} J_{\alpha\alpha}\,\omega^2 \quad \rightarrow$ $J_{\alpha\alpha}$ = Trägheitsmoment für die α-Achse

Eigenschaften des Trägheitstensors

- symmetrisch: $J_{\alpha\beta} = J_{\beta\alpha} \quad \Rightarrow$ 6 unabhängige Komponenten

- Rotation um die α-Achse: $\omega_\beta = \omega\,\delta_{\beta\alpha} = \begin{cases} \omega & \text{falls} \quad \beta = \alpha \\ 0 & \text{"} \quad \beta \neq \alpha \end{cases}$

  (z.B. $\alpha = 3 \;\Rightarrow\; \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$)

  $\Rightarrow \quad T_{rot} = \frac{1}{2} J_{\alpha\alpha}\,\omega^2$ ➞ $J_{\alpha\alpha}$ = Trägheitsmoment für die α-Achse

- Rotation mit $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$ um eine beliebige Achse $\vec{n}$:

  $$\Rightarrow \quad T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J_{\alpha\beta}\, n_\alpha n_\beta\, \omega^2 \equiv \frac{1}{2} J_{\vec{n}}\, \omega^2$$

  ➞ Tägheitsmoment für die $\vec{n}$-Richtung: $\quad J_{\vec{n}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J_{\alpha\beta}\, n_\alpha n_\beta$

Eigenschaften des Trägheitstensors

- symmetrisch: $J_{\alpha\beta} = J_{\beta\alpha} \quad \Rightarrow \quad$ 6 unabhängige Komponenten

- Rotation um die α-Achse: $\omega_\beta = \omega\,\delta_{\beta\alpha} = \begin{cases} \omega & \text{falls} \quad \beta = \alpha \\ 0 & \text{"} \quad \beta \neq \alpha \end{cases}$

  (z.B. $\alpha = 3 \;\Rightarrow\; \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$)

  $\Rightarrow \quad T_{rot} = \frac{1}{2} J_{\alpha\alpha}\,\omega^2$ $\quad \rightarrow \quad$ $J_{\alpha\alpha}$ = Trägheitsmoment für die α-Achse

- Rotation mit $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$ um eine beliebige Achse $\vec{n}$:

  $$\Rightarrow \quad T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J_{\alpha\beta}\, n_\alpha n_\beta\, \omega^2 \equiv \frac{1}{2} J_{\vec{n}}\, \omega^2$$

  $\rightarrow$ Tägheitsmoment für die $\vec{n}$-Richtung: $\quad J_{\vec{n}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J_{\alpha\beta}\, n_\alpha n_\beta$

  $\rightarrow$ Die 6 $J_{\alpha\beta}$ enthalten die Informationen für unendlich viele Dreh-Richtungen!

Skalare, Vektoren und Tensoren

Skalare, Vektoren und Tensoren

Transformation des Ortsvektors bei Drehung des Koordinatensystems:

$$\vec{r}\,' = \underline{\underline{D}}\,\vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad r_i' = \sum_{j=1}^{3} D_{ij}\, r_j, \qquad \underline{\underline{D}} = \text{Drehmatrix}$$

Skalare, Vektoren und Tensoren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Transformation des Ortsvektors bei Drehung des Koordinatensystems:

$$\vec{r}\,' = \underline{\underline{D}}\,\vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad r_i' = \sum_{j=1}^{3} D_{ij}\, r_j, \qquad \underline{\underline{D}} = \text{Drehmatrix}$$

z.B. Drehung um die z-Achse: $\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Skalare, Vektoren und Tensoren

Transformation des Ortsvektors bei Drehung des Koordinatensystems:

$$\vec{r}\,' = \underline{\underline{D}}\,\vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad r_i' = \sum_{j=1}^{3} D_{ij}\, r_j, \qquad \underline{\underline{D}} = \text{Drehmatrix}$$

Invarianz der Länge: $\vec{r}\,'^2 \overset{!}{=} \vec{r}\,^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{3} D_{ik}\, D_{jk} = \delta_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{D}}^T = \mathbb{1}$

($\underline{\underline{D}}$ = „orthogonale Matrix“)

Skalare, Vektoren und Tensoren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Transformation des Ortsvektors bei Drehung des Koordinatensystems:

$$\vec{r}\,' = \underline{\underline{D}}\,\vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad r_i' = \sum_{j=1}^{3} D_{ij}\, r_j, \qquad \underline{\underline{D}} = \text{Drehmatrix}$$

Invarianz der Länge: $\vec{r}\,'^2 \stackrel{!}{=} \vec{r}\,^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{3} D_{ik}\, D_{jk} = \delta_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{D}}^T = \mathbb{1}$

($\underline{\underline{D}}$ = „orthogonale Matrix“)

- Skalare (= Tensoren 0. Stufe): $S' = S$, d.h. invariant unter Drehungen

Skalare, Vektoren und Tensoren

Transformation des Ortsvektors bei Drehung des Koordinatensystems:

$$\vec{r}\,' = \underline{\underline{D}}\,\vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad r_i' = \sum_{j=1}^{3} D_{ij}\, r_j, \qquad \underline{\underline{D}} = \text{Drehmatrix}$$

Invarianz der Länge: $\vec{r}\,'^2 \stackrel{!}{=} \vec{r}\,^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{3} D_{ik}\, D_{jk} = \delta_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{D}}^T = \mathbb{1}$

($\underline{\underline{D}}$ = „orthogonale Matrix“)

- Skalare (= Tensoren 0. Stufe): $S' = S$, d.h. invariant unter Drehungen
- Vektoren (= Tensoren 1. Stufe)

  = 3-komponentige Größen, die sich wie $\vec{r}$ transformieren: $V_i' = \sum_{j=1}^{3} D_{ij}\, V_j$

  $(\Leftrightarrow \ \vec{V}\,' = \underline{\underline{D}}\,\vec{V})$

Skalare, Vektoren und Tensoren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Transformation des Ortsvektors bei Drehung des Koordinatensystems:

$$\vec{r}\,' = \underline{\underline{D}}\,\vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad r_i' = \sum_{j=1}^{3} D_{ij}\, r_j, \qquad \underline{\underline{D}} = \text{Drehmatrix}$$

Invarianz der Länge: $\vec{r}\,'^2 \stackrel{!}{=} \vec{r}^{\,2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{3} D_{ik}\, D_{jk} = \delta_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{D}}^T = \mathbb{1}$

($\underline{\underline{D}}$ = „orthogonale Matrix")

- Skalare (= Tensoren 0. Stufe): $S' = S$, d.h. invariant unter Drehungen
- Vektoren (= Tensoren 1. Stufe)

  = 3-komponentige Größen, die sich wie $\vec{r}$ transformieren: $V_i' = \sum_{j=1}^{3} D_{ij}\, V_j$

  $(\Leftrightarrow \;\; \vec{V}\,' = \underline{\underline{D}}\,\vec{V})$
- Tensoren 2. Stufe

  = 3×3-Matrizen $\underline{\underline{A}}$ mit $A_{ij}' = \sum_{m,n=1}^{3} D_{im}\, D_{jn}\, A_{mn} \quad (\Leftrightarrow \;\; \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{D A D}}^T)$

- Man kann zeigen:
  - Der Trägheitstensor $\underline{\underline{J}}$ ist ein Tensor 2. Stufe.
  - $\vec{\omega}$ ist ein Vektor (da $\vec{n}$ ein Vektor ist)

- Man kann zeigen:
  - Der Trägheitstensor $\underline{\underline{J}}$ ist ein Tensor 2. Stufe.
  - $\vec{\omega}$ ist ein Vektor (da $\vec{n}$ ein Vektor ist)

$$\Rightarrow \quad T'_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J'_{\alpha\beta}\, \omega'_\alpha \omega'_\beta$$

- Man kann zeigen:
  - Der Trägheitstensor $\underline{\underline{J}}$ ist ein Tensor 2. Stufe.
  - $\vec{\omega}$ ist ein Vektor (da $\vec{n}$ ein Vektor ist)

$$\Rightarrow \quad T'_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J'_{\alpha\beta}\, \omega'_\alpha \omega'_\beta$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{ij} D_{\alpha i}\, D_{\beta j}\, J_{ij} \sum_m D_{\alpha m}\, \omega_m \sum_n D_{\beta n}\, \omega_n$$

- Man kann zeigen:
  - Der Trägheitstensor $\underline{\underline{J}}$ ist ein Tensor 2. Stufe.
  - $\vec{\omega}$ ist ein Vektor (da $\vec{n}$ ein Vektor ist)

$$\Rightarrow \quad T'_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J'_{\alpha\beta}\, \omega'_\alpha \omega'_\beta$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{ij} D_{\alpha i}\, D_{\beta j}\, J_{ij} \sum_m D_{\alpha m}\, \omega_m \sum_n D_{\beta n}\, \omega_n$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j,m,n} \Big(\sum_\alpha D_{\alpha i}\, D_{\alpha m} \Big) \Big(\sum_\beta D_{\beta j}\, D_{\beta n} \Big) J_{ij}\, \omega_m\, \omega_n$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Man kann zeigen:
  - Der Trägheitstensor $\underline{\underline{J}}$ ist ein Tensor 2. Stufe.
  - $\vec{\omega}$ ist ein Vektor (da $\vec{n}$ ein Vektor ist)

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad T'_{rot} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J'_{\alpha\beta}\, \omega'_\alpha \omega'_\beta \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{ij} D_{\alpha i}\, D_{\beta j}\, J_{ij} \sum_m D_{\alpha m}\, \omega_m \sum_n D_{\beta n}\, \omega_n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j,m,n} \Big(\sum_\alpha D_{\alpha i}\, D_{\alpha m} \Big) \Big(\sum_\beta D_{\beta j}\, D_{\beta n} \Big) J_{ij}\, \omega_m\, \omega_n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j,m,n} \delta_{im}\, \delta_{jn}\, J_{ij}\, \omega_m\, \omega_n
\end{aligned}
$$

- Man kann zeigen:
  - Der Trägheitstensor $\underline{\underline{J}}$ ist ein Tensor 2. Stufe.
  - $\vec{\omega}$ ist ein Vektor (da $\vec{n}$ ein Vektor ist)

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad T'_{rot} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J'_{\alpha\beta}\, \omega'_{\alpha} \omega'_{\beta} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{ij} D_{\alpha i}\, D_{\beta j}\, J_{ij} \sum_{m} D_{\alpha m}\, \omega_m \sum_{n} D_{\beta n}\, \omega_n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j,m,n} \Big(\sum_{\alpha} D_{\alpha i}\, D_{\alpha m} \Big) \Big(\sum_{\beta} D_{\beta j}\, D_{\beta n} \Big) J_{ij}\, \omega_m\, \omega_n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j,m,n} \delta_{im}\, \delta_{jn}\, J_{ij}\, \omega_m\, \omega_n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij}\, \omega_i\, \omega_j
\end{aligned}
$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Man kann zeigen:
  - Der Trägheitstensor $\underline{\underline{J}}$ ist ein Tensor 2. Stufe.
  - $\vec{\omega}$ ist ein Vektor (da $\vec{n}$ ein Vektor ist)

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad T'_{rot} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} J'_{\alpha\beta}\, \omega'_\alpha \omega'_\beta \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{ij} D_{\alpha i}\, D_{\beta j}\, J_{ij} \sum_m D_{\alpha m}\, \omega_m \sum_n D_{\beta n}\, \omega_n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j,m,n} \Big(\sum_\alpha D_{\alpha i}\, D_{\alpha m} \Big) \Big(\sum_\beta D_{\beta j}\, D_{\beta n} \Big) J_{ij}\, \omega_m\, \omega_n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j,m,n} \delta_{im}\, \delta_{jn}\, J_{ij}\, \omega_m\, \omega_n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij}\, \omega_i\, \omega_j \; = \; T_{rot}
\end{aligned}
$$

→ Skalar, d.h. invariant unter Drehungen des Koordinatensystems!

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Lineare Algebra: Jede symmetrische reelle Matrix ist diagonalisierbar

→ Man kann das Koordinatensystem so drehen, dass

$$\underline{\underline{J}}' = \begin{pmatrix} J'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J'_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix}$$

Lineare Algebra: Jede symmetrische reelle Matrix ist diagonalisierbar

→ Man kann das Koordinatensystem so drehen, dass

$$\underline{\underline{J}}' = \begin{pmatrix} J'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J'_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix}$$

- Achsen dieses Koordinatensystems: Hauptträgheitsachsen
  $\leftrightarrow$ orthogonale Einheitsbasis: $\vec{n}_\xi$, $\vec{n}_\eta$, $\vec{n}_\zeta$
- Eigenwerte von $\underline{\underline{J}}$ (J_ξ, J_η und J_ζ): Hauptträgheitsmomente

Lineare Algebra: Jede symmetrische reelle Matrix ist diagonalisierbar

→ Man kann das Koordinatensystem so drehen, dass

$$\underline{\underline{J}}' = \begin{pmatrix} J'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J'_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix}$$

- Achsen dieses Koordinatensystems: Hauptträgheitsachsen
  $\leftrightarrow$ orthogonale Einheitsbasis: $\vec{n}_\xi$, $\vec{n}_\eta$, $\vec{n}_\zeta$
- Eigenwerte von $\underline{\underline{J}}$ (J_ξ, J_η und J_ζ): Hauptträgheitsmomente

→ 6 unabhängige Größen:

3 Hauptträgheitsmomente + Richtungen der Hauptträgheitsachsen (3 Winkel)

$\leftrightarrow$ 6 unabhängige Komponenten von $\underline{\underline{J}}$

- Auswertung der Rotationsenergie im Hauptträgheitssystem:

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\left(J_\xi\,\omega_\xi^2 + J_\eta\,\omega_\eta^2 + J_\zeta\,\omega_\zeta^2\right), \quad \omega_\alpha = \vec{\omega}\cdot\vec{n}_\alpha, \quad \alpha = \xi,\,\eta,\,\zeta$$

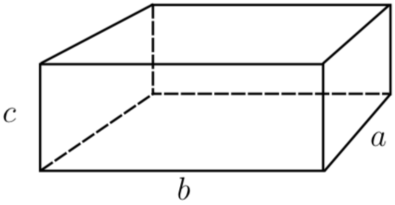
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Auswertung der Rotationsenergie im Hauptträgheitssystem:

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\left(J_\xi\, \omega_\xi^2 + J_\eta\, \omega_\eta^2 + J_\zeta\, \omega_\zeta^2\right), \quad \omega_\alpha = \vec{\omega}\cdot\vec{n}_\alpha, \quad \alpha = \xi,\, \eta,\, \zeta$$

- Klassifizierung:
  - Kugelkreisel: $J_\xi = J_\eta = J_\zeta$
  - symmetrischer Kreisel: $J_i = J_j \neq J_k, \quad \{i, j, k\} = \{\xi, \eta, \zeta\}$
  - unsymmetrischer Kreisel: $J_\xi \neq J_\eta \neq J_\zeta \neq J_\xi$

Beispiel: Quader

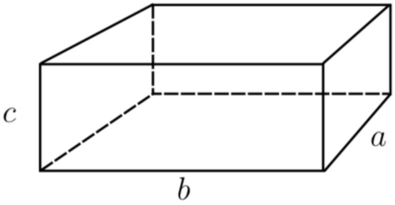


- Kantenlängen a, b, c
- homogene Massendichte ρ_0

$\Rightarrow \quad M = \rho_0\, abc$

Beispiel: Quader

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



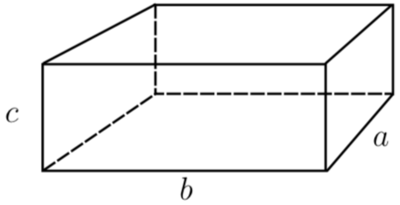
- Kantenlängen a, b, c
- homogene Massendichte ρ_0

$\Rightarrow \quad M = \rho_0\, abc$

- Koordinatensystem:
  - Ursprung = Schwerpunkt
  - Koordinatenachsen parallel zu den Kanten

Beispiel: Quader

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- Kantenlängen a, b, c
- homogene Massendichte ρ_0

$\Rightarrow \quad M = \rho_0\, abc$

- Koordinatensystem:
  - Ursprung = Schwerpunkt
  - Koordinatenachsen parallel zu den Kanten

$$\Rightarrow \quad J_{\alpha\beta} = \int d^3r\, \rho(\vec{r}) \left(\vec{r}^{\,2}\delta_{\alpha\beta} - r_\alpha r_\beta\right) = \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz \,\left(\vec{r}^{\,2}\delta_{\alpha\beta} - r_\alpha r_\beta\right)$$

$$J_{\alpha\beta} = \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz \, \left(\vec{r}^{\,2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha r_\beta \right)$$

$$J_{\alpha\beta} = \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz \left(\vec{r}^{\,2}\delta_{\alpha\beta} - r_\alpha r_\beta\right)$$

- $J_{11} = \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz \left(y^2 + z^2\right)$

$$J_{\alpha\beta} = \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz \left(\vec{r}^{\,2}\delta_{\alpha\beta} - r_\alpha r_\beta\right)$$

- $$J_{11} = \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz \left(y^2 + z^2\right)$$

  $$= \rho_0 a \left(c \int_{-b/2}^{b/2} dy\, y^2 + b \int_{-c/2}^{c/2} dz\, z^2 \right)$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$J_{\alpha\beta} = \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz \left(\vec{r}^{\,2}\delta_{\alpha\beta} - r_\alpha r_\beta\right)$$

- $$J_{11} = \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz \left(y^2 + z^2\right)$$

$$= \rho_0 a \left(c \int_{-b/2}^{b/2} dy\, y^2 + b \int_{-c/2}^{c/2} dz\, z^2 \right) = \tfrac{1}{12}\rho_0\, abc\,(b^2 + c^2)$$

$$J_{\alpha\beta} = \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz \left(\vec{r}^{\,2}\delta_{\alpha\beta} - r_\alpha r_\beta\right)$$

- $$J_{11} = \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz \left(y^2 + z^2\right)$$

$$= \rho_0 a \left(c \int_{-b/2}^{b/2} dy\, y^2 + b \int_{-c/2}^{c/2} dz\, z^2 \right) = \tfrac{1}{12}\rho_0\, abc\,(b^2 + c^2) = \tfrac{M}{12}\,(b^2 + c^2)$$

$$J_{\alpha\beta} = \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz \left(\vec{r}^{\,2}\delta_{\alpha\beta} - r_\alpha r_\beta\right)$$

- $$J_{11} = \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz \left(y^2 + z^2\right)$$

$$= \rho_0 a \left(c \int_{-b/2}^{b/2} dy\, y^2 + b \int_{-c/2}^{c/2} dz\, z^2 \right) = \tfrac{1}{12}\rho_0\, abc\,(b^2 + c^2) = \tfrac{M}{12}\,(b^2 + c^2)$$

- $$J_{12} = \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz \,(-xy)$$

$$J_{\alpha\beta} = \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz \left(\vec{r}^{\,2}\delta_{\alpha\beta} - r_\alpha r_\beta\right)$$

- $$J_{11} = \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz \left(y^2 + z^2\right)$$

  $$= \rho_0 a \left(c \int_{-b/2}^{b/2} dy\, y^2 + b \int_{-c/2}^{c/2} dz\, z^2 \right) = \tfrac{1}{12}\rho_0\, abc\,(b^2 + c^2) = \tfrac{M}{12}\,(b^2 + c^2)$$

- $$J_{12} = \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz\, (-xy) = -\rho_0\, c \int_{-a/2}^{a/2} dx\, x \int_{-b/2}^{b/2} dy\, y$$

$$J_{\alpha\beta} = \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz \left(\vec{r}^{\,2}\delta_{\alpha\beta} - r_\alpha r_\beta\right)$$

- $$J_{11} = \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz \left(y^2 + z^2\right)$$

  $$= \rho_0 a \left(c \int_{-b/2}^{b/2} dy\, y^2 + b \int_{-c/2}^{c/2} dz\, z^2 \right) = \frac{1}{12}\rho_0\, abc\,(b^2 + c^2) = \frac{M}{12}\,(b^2 + c^2)$$

- $$J_{12} = \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz\, (-xy) = -\rho_0\, c \int_{-a/2}^{a/2} dx\, x \int_{-b/2}^{b/2} dy\, y = 0$$

$$J_{\alpha\beta} = \rho_0 \int\limits_{-a/2}^{a/2} dx \int\limits_{-b/2}^{b/2} dy \int\limits_{-c/2}^{c/2} dz \left(\vec{r}^{\,2}\delta_{\alpha\beta} - r_\alpha r_\beta\right)$$

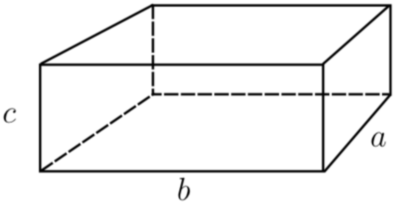
- $J_{11} = \rho_0 \int\limits_{-a/2}^{a/2} dx \int\limits_{-b/2}^{b/2} dy \int\limits_{-c/2}^{c/2} dz \left(y^2 + z^2\right)$

  $$= \rho_0 a \left(c \int\limits_{-b/2}^{b/2} dy\, y^2 + b \int\limits_{-c/2}^{c/2} dz\, z^2 \right) = \frac{1}{12}\rho_0\, abc\,(b^2 + c^2) = \frac{M}{12}\,(b^2 + c^2)$$

- $J_{12} = \rho_0 \int\limits_{-a/2}^{a/2} dx \int\limits_{-b/2}^{b/2} dy \int\limits_{-c/2}^{c/2} dz\, (-xy) = -\rho_0\, c \int\limits_{-a/2}^{a/2} dx\, x \int\limits_{-b/2}^{b/2} dy\, y = 0$

- Analog (oder durch Permutation von $(1, x, a)$, $(2, y, b)$ und $(3, z, c)$):

  $J_{22} = \frac{M}{12}\,(c^2 + a^2), \quad J_{33} = \frac{M}{12}\,(a^2 + b^2), \quad J_{21} = J_{13} = J_{31} = J_{23} = J_{31} = 0$



- Kantenlängen a, b, c
- homogene Massendichte ρ_0
- Ursprung = Schwerpunkt
- Koordinatenachsen parallel zu den Kanten

$$\Rightarrow \underline{\underline{J}} = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \qquad \text{diagonal!}$$

Hauptträgheitsachsen: $\xi = x, \eta = y, \zeta = z$

Hauptträgheitsmomente: $J_\xi = \frac{M}{12}(b^2 + c^2),\ J_\eta = \frac{M}{12}(c^2 + a^2),\ J_\zeta = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$

Verschiebung des Koordinatenursprungs

zwei verschiedene körperfeste Koordinatensysteme

K^*: Ursprung = Schwerpunkt

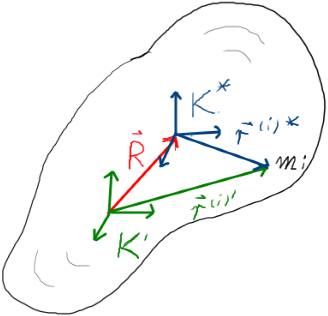
Ortsvektor des Massepunkts m_i: $\vec{r}^{\,(i)*}$

K': Ursprung beliebig

Ortsvektor des Massepunkts m_i: $\vec{r}^{\,(i)\prime}$

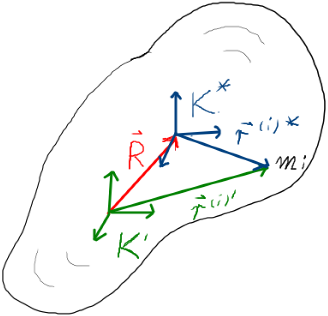
Ortsvektor des Schwerpunkts: $\vec{R}$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}^{\,(i)\prime} = \vec{R} + \vec{r}^{\,(i)*}$$



Verschiebung des Koordinatenursprungs

zwei verschiedene körperfeste Koordinatensysteme



K^*: Ursprung = Schwerpunkt

Ortsvektor des Massepunkts m_i: $\vec{r}^{\,(i)*}$

K': Ursprung beliebig

Ortsvektor des Massepunkts m_i: $\vec{r}^{\,(i)\prime}$

Ortsvektor des Schwerpunkts: $\vec{R}$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}^{\,(i)\prime} = \vec{R} + \vec{r}^{\,(i)*}$$

- Trägheitstensor bzgl. einer Drehachse durch den Ursprung von K':

$$J_{\alpha\beta} = \sum_i m_i \left[\vec{r}^{\,(i)\prime\,2}\delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)\prime} r_\beta^{(i)\prime}\right]$$
$$= \sum_i m_i \left[(\vec{R} + \vec{r}^{\,(i)*})^2\delta_{\alpha\beta} - (R_\alpha + r_\alpha^{(i)*})(R_\beta + r_\beta^{(i)*})\right]$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Trägheitstensor bzgl. einer Drehachse durch den Ursprung von K':

$$J_{\alpha\beta} = \sum_i m_i \left[(\vec{R} + \vec{r}^{\,(i)*})^2 \delta_{\alpha\beta} - (R_\alpha + r_\alpha^{(i)*})(R_\beta + r_\beta^{(i)*}) \right]$$

- Trägheitstensor bzgl. einer Drehachse durch den Ursprung von K':

$$J_{\alpha\beta} = \sum_i m_i \left[(\vec{R} + \vec{r}^{\,(i)*})^2 \delta_{\alpha\beta} - (R_\alpha + r_\alpha^{(i)*})(R_\beta + r_\beta^{(i)*})\right]$$

$$= \sum_i m_i \left(\vec{R}^{\,2} \delta_{\alpha\beta} - R_\alpha R_\beta\right) + \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)*2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)*} r_\beta^{(i)*}\right)$$

$$+ 2\vec{R} \cdot \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)*}}_{=\vec{0}} \delta_{\alpha\beta} - R_\alpha \underbrace{\sum_i m_i r_\beta^{(i)*}}_{=0} - R_\beta \underbrace{\sum_i m_i r_\alpha^{(i)*}}_{=0}$$

- Trägheitstensor bzgl. einer Drehachse durch den Ursprung von K':

$$\begin{aligned}
J_{\alpha\beta} &= \sum_i m_i \left[(\vec{R} + \vec{r}^{\,(i)*})^2 \delta_{\alpha\beta} - (R_\alpha + r_\alpha^{(i)*})(R_\beta + r_\beta^{(i)*}) \right] \\
&= \sum_i m_i \left(\vec{R}^{\,2} \delta_{\alpha\beta} - R_\alpha R_\beta \right) + \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)*2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)*} r_\beta^{(i)*} \right) \\
&\quad + 2\vec{R} \cdot \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)*}}_{=\vec{0}} \delta_{\alpha\beta} - R_\alpha \underbrace{\sum_i m_i r_\beta^{(i)*}}_{=0} - R_\beta \underbrace{\sum_i m_i r_\alpha^{(i)*}}_{=0} \\
&= M \left(\vec{R}^{\,2} \delta_{\alpha\beta} - R_\alpha R_\beta \right) + \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)*2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)*} r_\beta^{(i)*} \right)
\end{aligned}$$

- Trägheitstensor bzgl. einer Drehachse durch den Ursprung von K':

$$
\begin{aligned}
J_{\alpha\beta} &= \sum_i m_i \left[(\vec{R} + \vec{r}^{\,(i)*})^2 \delta_{\alpha\beta} - (R_\alpha + r_\alpha^{(i)*})(R_\beta + r_\beta^{(i)*}) \right] \\
&= \sum_i m_i \left(\vec{R}^{\,2} \delta_{\alpha\beta} - R_\alpha R_\beta \right) + \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)*2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)*} r_\beta^{(i)*} \right) \\
&\quad + 2\vec{R} \cdot \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)*}}_{=\vec{0}} \delta_{\alpha\beta} - R_\alpha \underbrace{\sum_i m_i r_\beta^{(i)*}}_{=0} - R_\beta \underbrace{\sum_i m_i r_\alpha^{(i)*}}_{=0} \\
&= M \left(\vec{R}^{\,2} \delta_{\alpha\beta} - R_\alpha R_\beta \right) + \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)*2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)*} r_\beta^{(i)*} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \boxed{J_{\alpha\beta} = J^*_{\alpha\beta} + M \left(\vec{R}^{\,2} \delta_{\alpha\beta} - R_\alpha R_\beta \right)}
$$

„Steiner'scher Satz“

$J^*_{\alpha\beta}$ =Trägheitstensor bzgl. einer Drehachse durch den Schwerpunkt