Wirkungsquerschnitt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- (differenzieller) Wirkungsquerschnitt = $\dfrac{\text{„interessante" Ereignisse pro Zeit}}{\text{einlaufende Projektilteilchen pro Zeit und Fläche}}$

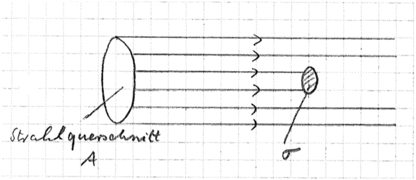
  $\rightarrow$ Dimension = Fläche

Wirkungsquerschnitt

- (differenzieller) Wirkungsquerschnitt = $\frac{\text{„interessante" Ereignisse pro Zeit}}{\text{einlaufende Projektilteilchen pro Zeit und Fläche}}$

  → Dimension = Fläche

- anschaulich:



Zahl der „Ereignisse":

$$N_{\text{abs}} = \frac{\sigma}{A}\, N_{\text{einl}}$$

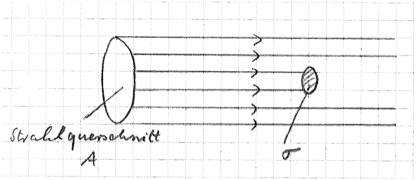
$$\Leftrightarrow \quad \sigma = \frac{N_{\text{abs}}}{N_{\text{einl}}/A}$$

Wirkungsquerschnitt

- (differenzieller) Wirkungsquerschnitt = $\frac{\text{„interessante" Ereignisse pro Zeit}}{\text{einlaufende Projektilteilchen pro Zeit und Fläche}}$

  → Dimension = Fläche

- anschaulich:



Zahl der „Ereignisse":

$$N_{\text{abs}} = \frac{\sigma}{A} N_{\text{einl}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma = \frac{N_{\text{abs}}}{N_{\text{einl}}/A}$$

- häufig verwendete Einheit: 1b = 1 barn („Scheune")

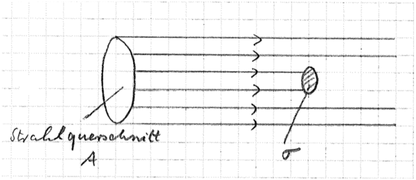
Wirkungsquerschnitt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- (differenzieller) Wirkungsquerschnitt = $\dfrac{\text{„interessante" Ereignisse pro Zeit}}{\text{einlaufende Projektilteilchen pro Zeit und Fläche}}$

  → Dimension = Fläche

- anschaulich:



Zahl der „Ereignisse":

$$N_{\text{abs}} = \frac{\sigma}{A} N_{\text{einl}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma = \frac{N_{\text{abs}}}{N_{\text{einl}}/A}$$

- häufig verwendete Einheit: 1 b = 1 barn („Scheune")

  $= 10^{-24}\,\text{cm}^2 = 100\,\text{fm}^2$

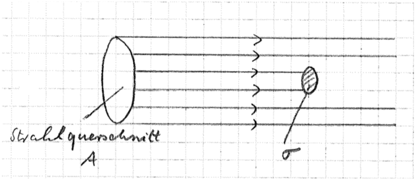
Wirkungsquerschnitt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- (differenzieller) Wirkungsquerschnitt = $\frac{\text{„interessante" Ereignisse pro Zeit}}{\text{einlaufende Projektilteilchen pro Zeit und Fläche}}$

  → Dimension = Fläche

- anschaulich:



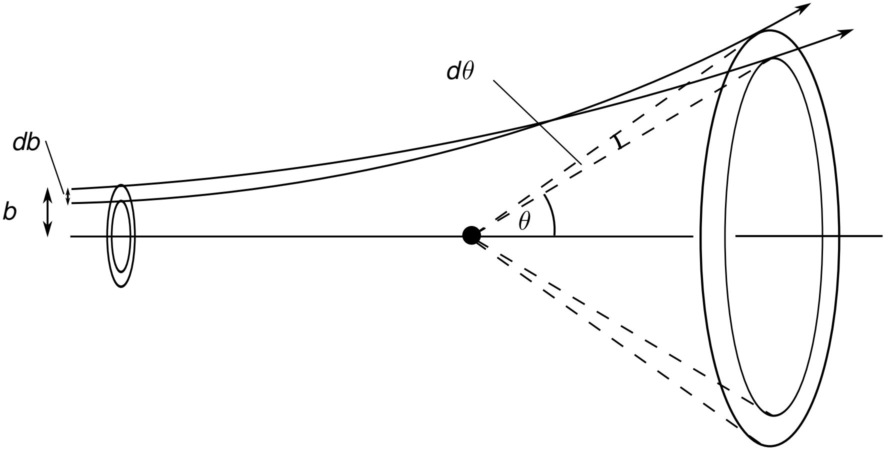
Zahl der „Ereignisse":

$$N_{\text{abs}} = \frac{\sigma}{A} N_{\text{einl}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma = \frac{N_{\text{abs}}}{N_{\text{einl}}/A}$$

- häufig verwendete Einheit: 1 b = 1 barn („Scheune")

  $= 10^{-24}\text{cm}^2 = 100\,\text{fm}^2 \quad = \pi R^2 \rightarrow R = 5.6$ fm (größerer Atomkern)


$d\theta$
db
b
θ

$\Rightarrow$ dN = in das Winkelintervall $[\theta, \theta + d\theta]$ gestreute Teilchen pro Zeit

= durch den Ring $[b, b + db]$ eingelaufene Teilchen pro Zeit

$\Rightarrow$ dN = in das Winkelintervall $[\theta, \theta + d\theta]$ gestreute Teilchen pro Zeit

= durch den Ring $[b, b + db]$ eingelaufene Teilchen pro Zeit

= einlaufender Teilchenstrom $\times$ Fläche des Rings

$= j \cdot 2\pi b |db|$

$\Rightarrow$ dN = in das Winkelintervall $[\theta, \theta + d\theta]$ gestreute Teilchen pro Zeit

= durch den Ring $[b, b + db]$ eingelaufene Teilchen pro Zeit

= einlaufender Teilchenstrom $\times$ Fläche des Rings

$= j \cdot 2\pi b|db|$

$\Rightarrow$ $d\sigma = \frac{dN}{j} = 2\pi\, b\,|db|$

$\Rightarrow$ dN = in das Winkelintervall $[\theta, \theta + d\theta]$ gestreute Teilchen pro Zeit

= durch den Ring $[b, b + db]$ eingelaufene Teilchen pro Zeit

= einlaufender Teilchenstrom $\times$ Fläche des Rings

$= j \cdot 2\pi b|db|$

$\Rightarrow$ $d\sigma = \frac{dN}{j} = 2\pi\, b\, |db|$

$\Rightarrow$ differenzieller Wirkungsquerschnitt: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi\, b\, |db|}{2\pi\, \sin\theta\, d\theta} = \frac{b}{\sin\theta} \left|\frac{db}{d\theta}\right|$

$\Rightarrow$ dN = in das Winkelintervall $[\theta, \theta + d\theta]$ gestreute Teilchen pro Zeit

= durch den Ring $[b, b + db]$ eingelaufene Teilchen pro Zeit

= einlaufender Teilchenstrom $\times$ Fläche des Rings

$= j \cdot 2\pi b |db|$

$\Rightarrow$ $d\sigma = \frac{dN}{j} = 2\pi\, b\, |db|$

$\Rightarrow$ differenzieller Wirkungsquerschnitt: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi\, b\, |db|}{2\pi\, \sin\theta\, d\theta} = \frac{b}{\sin\theta} \left|\frac{db}{d\theta}\right|$

- Vorgehensweise: $\theta = \theta(b) \xrightarrow{\text{Umkehrfkt.}} b(\theta) \rightarrow \frac{db}{d\theta} \rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega}$

$$\Rightarrow \quad dN = \text{in das Winkelintervall } [\theta, \theta + d\theta] \text{ gestreute Teilchen pro Zeit}$$
$$= \text{durch den Ring } [b, b + db] \text{ eingelaufene Teilchen pro Zeit}$$
$$= \text{einlaufender Teilchenstrom} \times \text{Fläche des Rings}$$
$$= j \cdot 2\pi b |db|$$

$$\Rightarrow \quad d\sigma = \frac{dN}{j} = 2\pi\, b\, |db|$$

$\Rightarrow$ differenzieller Wirkungsquerschnitt: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi\, b\, |db|}{2\pi\ \sin\theta\, d\theta} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$

- Vorgehensweise: $\theta = \theta(b) \xrightarrow{\text{Umkehrfkt.}} b(\theta) \rightarrow \frac{db}{d\theta} \rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega}$
- **Beispiel:** Rutherford-Streuung

Coulomb-Potenzial $V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} \equiv -\frac{\kappa}{r}, \qquad \kappa = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}$

$\xrightarrow{\text{längere Rechnung}} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{\kappa^2}{16E^2\ \sin^4(\theta/2)}$ *(Rutherford'sche Streuformel)*

3. Der starre Körper

3.1 Definition und Freiheitsgrade des starren Körpers

3.1 Definition und Freiheitsgrade des starren Körpers

- ausgedehnte Körper:
  - mikroskopische Beschreibung: $N \sim 10^{23}$ Atome oder Moleküle
  - oft zweckmäßiger: kontinuierliche Dichteverteilung

Beispiel: $M = \sum_{i=1}^{N} m_i \quad \overset{\text{kontin.}}{\longrightarrow} \quad \int d^3r\, \rho(\vec{r})$

3.1 Definition und Freiheitsgrade des starren Körpers

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- ausgedehnte Körper:
  - mikroskopische Beschreibung: $N \sim 10^{23}$ Atome oder Moleküle
  - oft zweckmäßiger: kontinuierliche Dichteverteilung

Beispiel: $M = \sum_{i=1}^{N} m_i \xrightarrow{\text{kontin.}} \int d^3r\, \rho(\vec{r})$

- Zahl der Freiheitsgrade:

  (= Angaben, um die Lage des Körpers im Raum vollständig zu beschreiben)
  - $3N$ (3 Koordinaten pro Punktteilchen)
  - unendlich für kontinuierliche Dichteverteilungen

- starrer Körper:

  Abstände zwischen den einzelnen Punkten bleiben zeitlich konstant

  $r_{ij}(t) = \left|\vec{r}^{\,(i)}(t) - \vec{r}^{\,(j)}(t)\right| = c_{ij} = const.$

- starrer Körper:

  Abstände zwischen den einzelnen Punkten bleiben zeitlich konstant

  $r_{ij}(t) = \left|\vec{r}^{\,(i)}(t) - \vec{r}^{\,(j)}(t)\right| = c_{ij} = const.$

- Zahl der Freiheitsgrade?

- starrer Körper:

  Abstände zwischen den einzelnen Punkten bleiben zeitlich konstant

  $$r_{ij}(t) = \left|\vec{r}^{\,(i)}(t) - \vec{r}^{\,(j)}(t)\right| = c_{ij} = const.$$

- Zahl der Freiheitsgrade?

  - 1. Punkt: $\vec{r}^{\,(1)}$ $\rightarrow$ 3 unabhängige Koordinaten

- starrer Körper:

  Abstände zwischen den einzelnen Punkten bleiben zeitlich konstant

  $$r_{ij}(t) = \left|\vec{r}^{\,(i)}(t) - \vec{r}^{\,(j)}(t)\right| = c_{ij} = const.$$

- Zahl der Freiheitsgrade?
  - 1. Punkt: $\vec{r}^{\,(1)}$ $\rightarrow$ 3 unabhängige Koordinaten
  - 2. Punkt: $\vec{r}^{\,(2)}$ auf Kugelschale mit Radius c_{12} um $\vec{r}^{\,(1)}$
    $\rightarrow$ 2 unabh. Koordinaten (z.B. zwei Winkel)

- starrer Körper:

  Abstände zwischen den einzelnen Punkten bleiben zeitlich konstant

  $r_{ij}(t) = \left|\vec{r}^{\,(i)}(t) - \vec{r}^{\,(j)}(t)\right| = c_{ij} = const.$

- Zahl der Freiheitsgrade?

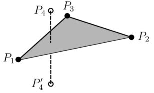
  - 1. Punkt: $\vec{r}^{\,(1)}$ $\rightarrow$ 3 unabhängige Koordinaten
  - 2. Punkt: $\vec{r}^{\,(2)}$ auf Kugelschale mit Radius c_{12} um $\vec{r}^{\,(1)}$
    $\rightarrow$ 2 unabh. Koordinaten (z.B. zwei Winkel)
  - 3. Punkt: $\vec{r}^{\,(3)}$ auf Schittlinie zweier Kugelschalen = Kreis
    $\rightarrow$ 1 unabh. Koordinate (Winkel)

- starrer Körper:

  Abstände zwischen den einzelnen Punkten bleiben zeitlich konstant

  $$r_{ij}(t) = \left|\vec{r}^{\,(i)}(t) - \vec{r}^{\,(j)}(t)\right| = c_{ij} = const.$$

- Zahl der Freiheitsgrade?
  - 1. Punkt: $\vec{r}^{\,(1)}$ ➞ 3 unabhängige Koordinaten
  - 2. Punkt: $\vec{r}^{\,(2)}$ auf Kugelschale mit Radius c_{12} um $\vec{r}^{\,(1)}$
    ➞ 2 unabh. Koordinaten (z.B. zwei Winkel)
  - 3. Punkt: $\vec{r}^{\,(3)}$ auf Schittlinie zweier Kugelschalen = Kreis
    ➞ 1 unabh. Koordinate (Winkel)
  - 4. Punkt: zwei Möglichkeiten,
    eindeutig, wenn man die Orientierung festlegt
    (Vorzeichen von $\vec{r}_{14} \cdot (\vec{r}_{12} \times \vec{r}_{13})$)



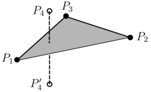
- starrer Körper:

  Abstände zwischen den einzelnen Punkten bleiben zeitlich konstant

  $$r_{ij}(t) = \left|\vec{r}^{\,(i)}(t) - \vec{r}^{\,(j)}(t)\right| = c_{ij} = const.$$

- Zahl der Freiheitsgrade?

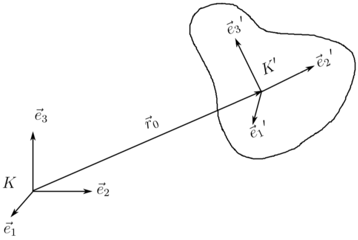
  - 1. Punkt: $\vec{r}^{\,(1)}$ ➞ 3 unabhängige Koordinaten
  - 2. Punkt: $\vec{r}^{\,(2)}$ auf Kugelschale mit Radius c_{12} um $\vec{r}^{\,(1)}$
    ➞ 2 unabh. Koordinaten (z.B. zwei Winkel)
  - 3. Punkt: $\vec{r}^{\,(3)}$ auf Schittlinie zweier Kugelschalen = Kreis
    ➞ 1 unabh. Koordinate (Winkel)
  - 4. Punkt: zwei Möglichkeiten,
    eindeutig, wenn man die Orientierung festlegt
    (Vorzeichen von $\vec{r}_{14} \cdot (\vec{r}_{12} \times \vec{r}_{13})$)



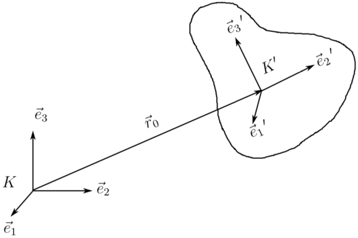
➞ $3 + 2 + 1 = 6$ Freiheitgrade

- Alternative Beschreibung:
  - raumfestes Koordinatensystem K (= Inertialsystem)
  - körperfestes Koordinatensystem K' fest im Körper verankert

    $\Rightarrow$ Koordinaten aller Körperpunkte sind in K' zeitlich konstant

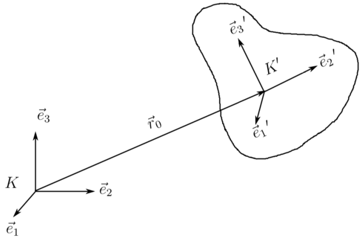


- Alternative Beschreibung:
  - raumfestes Koordinatensystem K (= Inertialsystem)
  - körperfestes Koordinatensystem K' fest im Körper verankert
    $\Rightarrow$ Koordinaten aller Körperpunkte sind in K' zeitlich konstant



- Eindeutige Festlegung der Lage des Körpers bzgl. K:
  - Ortsvektor $\vec{r}_0(t)$ des Ursprungs von K' (= 3 Koordinaten)
  - Richtungen der Einheitsvektoren $\vec{e}_1{}'(t)$ (2 Winkel) und $\vec{e}_2{}'(t)$ (1 Winkel)

- Alternative Beschreibung:
  - raumfestes Koordinatensystem K (= Inertialsystem)
  - körperfestes Koordinatensystem K' fest im Körper verankert
    $\Rightarrow$ Koordinaten aller Körperpunkte sind in K' zeitlich konstant



- Eindeutige Festlegung der Lage des Körpers bzgl. K:
  - Ortsvektor $\vec{r}_0(t)$ des Ursprungs von K' (= 3 Koordinaten)
  - Richtungen der Einheitsvektoren $\vec{e}_1{}'(t)$ (2 Winkel) und $\vec{e}_2{}'(t)$ (1 Winkel)

$\hat{=}$ 3 Translations- + 3 Rotationsfreiheitsgrade
  - Translation: Verschiebung des Ursprungs von K'
  - Rotation: Richtungsänderung der Koordinatenachsen von K'

3.2 Rotation um eine körperfeste Achse

3.2 Rotation um eine körperfeste Achse

- allgemeine Bewegung:

  Rotationsachse des starren Körpers kann sich mit der Zeit ändern

3.2 Rotation um eine körperfeste Achse

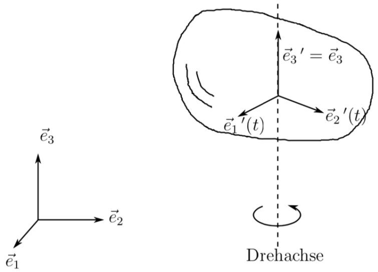
- allgemeine Bewegung:

  Rotationsachse des starren Körpers kann sich mit der Zeit ändern

- Vereinfachte Situation:

  Nach Abzug der Translationsbewegung rotiert K' um eine feste Achse.

  - keine Translationsbewegung
    → raumfeste Achse
  - zusätzliche Translationsbewegung
    → z.B. Rollbewegung mit fester Achsrichtung



- oft zweckmäßige Koordinatenwahl:

  Drehachse = $\vec{e}_3' = \vec{e}_3$

3.2.1 Raumfeste Achse

- keine Translationsbewegung

  $\Rightarrow$ nur 1 Freiheitsgrad: Drehwinkel φ

3.2.1 Raumfeste Achse

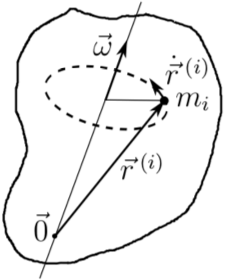
- keine Translationsbewegung

  $\Rightarrow$ nur 1 Freiheitsgrad: Drehwinkel φ

- Koordinatenwahl:

  Drehachse mit Richtung $\vec{n}$ durch den Ursprung von K

  ➞ Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$, $\omega \equiv \dot{\varphi}$



3.2.1 Raumfeste Achse

- keine Translationsbewegung

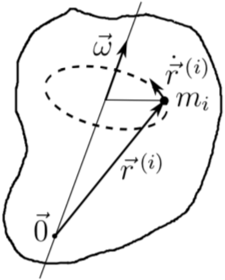
  $\Rightarrow$ nur 1 Freiheitsgrad: Drehwinkel φ

- Koordinatenwahl:

  Drehachse mit Richtung $\vec{n}$ durch den Ursprung von K

  ➞ Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\vec{n}, \quad \omega \equiv \dot{\varphi}$

- Welche Geschwindigkeit hat ein Punkt am Ort $\vec{r}^{(i)}$?



3.2.1 Raumfeste Achse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- keine Translationsbewegung

  $\Rightarrow$ nur 1 Freiheitsgrad: Drehwinkel φ

- Koordinatenwahl:

  Drehachse mit Richtung $\vec{n}$ durch den Ursprung von K

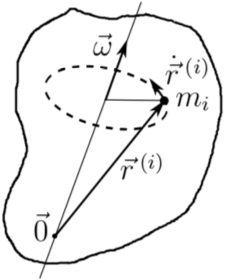
  $\rightarrow$ Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \vec{n}, \quad \omega \equiv \dot{\varphi}$

- Welche Geschwindigkeit hat ein Punkt am Ort $\vec{r}^{(i)}$?

- Wähle Koordinatensystem mit $\vec{n} = \vec{e}_3$

  $\rightarrow$ Zylinderkoordinaten: $\vec{r}^{\,(i)} = \rho^{(i)}\,\vec{e}_\rho + z^{(i)}\vec{e}_z$

  $\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \dot{\rho}^{(i)}\,\vec{e}_\rho + \rho^{(i)}\,\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z}^{(i)}\vec{e}_z = \dot{\rho}^{(i)}\,\vec{e}_\rho + \rho^{(i)}\,\dot{\varphi}^{(i)}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}^{(i)}\vec{e}_z$



3.2.1 Raumfeste Achse

- keine Translationsbewegung

  $\Rightarrow$ nur 1 Freiheitsgrad: Drehwinkel φ

- Koordinatenwahl:

  Drehachse mit Richtung $\vec{n}$ durch den Ursprung von K

  $\rightarrow$ Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\vec{n}, \quad \omega \equiv \dot{\varphi}$

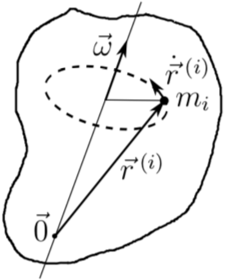
- Welche Geschwindigkeit hat ein Punkt am Ort $\vec{r}^{(i)}$?

- Wähle Koordinatensystem mit $\vec{n} = \vec{e}_3$

  $\rightarrow$ Zylinderkoordinaten: $\vec{r}^{\,(i)} = \rho^{(i)}\,\vec{e}_\rho + z^{(i)}\vec{e}_z$

  $\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \dot{\rho}^{(i)}\,\vec{e}_\rho + \rho^{(i)}\,\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z}^{(i)}\vec{e}_z = \dot{\rho}^{(i)}\,\vec{e}_\rho + \rho^{(i)}\,\dot{\varphi}^{(i)}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}^{(i)}\vec{e}_z$

  hier: $\dot{\rho}^{(i)} = \dot{z}^{(i)} = 0 \qquad \dot{\varphi}^{(i)} = \omega$



3.2.1 Raumfeste Achse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

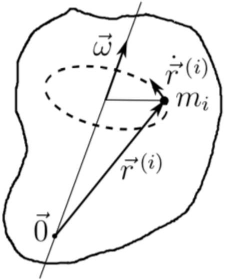
- keine Translationsbewegung

  $\Rightarrow$ nur 1 Freiheitsgrad: Drehwinkel φ

- Koordinatenwahl:

  Drehachse mit Richtung $\vec{n}$ durch den Ursprung von K

  $\rightarrow$ Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\vec{n}, \quad \omega \equiv \dot{\varphi}$



- Welche Geschwindigkeit hat ein Punkt am Ort $\vec{r}^{(i)}$?

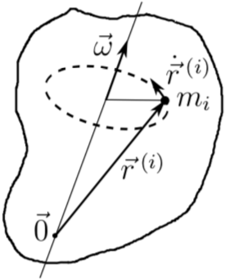
- Wähle Koordinatensystem mit $\vec{n} = \vec{e}_3$

  $\rightarrow$ Zylinderkoordinaten: $\vec{r}^{\,(i)} = \rho^{(i)}\,\vec{e}_\rho + z^{(i)}\vec{e}_z$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \dot{\rho}^{(i)}\,\vec{e}_\rho + \rho^{(i)}\,\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z}^{(i)}\vec{e}_z = \dot{\rho}^{(i)}\,\vec{e}_\rho + \rho^{(i)}\,\dot{\varphi}^{(i)}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}^{(i)}\vec{e}_z$$

hier: $\dot{\rho}^{(i)} = \dot{z}^{(i)} = 0 \quad \dot{\varphi}^{(i)} = \omega \qquad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \omega\rho^{(i)}\,\vec{e}_\varphi$

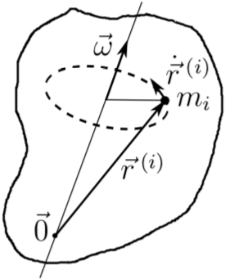
- also: $\dot{\vec{r}}^{(i)} = \omega \rho^{(i)} \, \vec{e}_\varphi$ für $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$



- also: $\dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \omega\rho^{(i)}\,\vec{e}_\varphi$ für $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$

  andererseits:

  $\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)} = \omega\rho^{(i)}\,\underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho}_{=\vec{e}_\varphi} + \omega z^{(i)}\,\underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_z}_{=\vec{0}} = \omega\rho^{(i)}\vec{e}_\varphi$

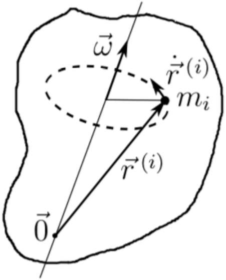


- also: $\dot{\vec{r}}^{(i)} = \omega\rho^{(i)}\,\vec{e}_\varphi$ für $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$

  andererseits:

  $$\vec{\omega} \times \vec{r}^{(i)} = \omega\rho^{(i)}\,\underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho}_{=\vec{e}_\varphi} + \omega z^{(i)}\,\underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_z}_{=\vec{0}} = \omega\rho^{(i)}\vec{e}_\varphi$$

  $$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{r}}^{(i)} = \vec{\omega} \times \vec{r}^{(i)} = \omega\,\left(\vec{n} \times \vec{r}^{(i)}\right)}$$



- also: $\dot{\vec{r}}^{(i)} = \omega\rho^{(i)}\,\vec{e}_\varphi$ für $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$

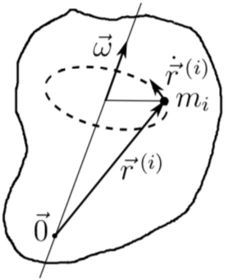
  andererseits:

  $$\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)} = \omega\rho^{(i)}\,\underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho}_{=\vec{e}_\varphi} + \omega z^{(i)}\,\underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_z}_{=\vec{0}} = \omega\rho^{(i)}\vec{e}_\varphi$$

  $$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{r}}^{(i)} = \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)} = \omega\,\left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)}\right)}$$

  gilt auch für $\vec{n} \neq \vec{e}_3$!

  (Transformationseigenschaft von Vektoren)



Rotationsenergie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- keine Translation $\Rightarrow$ $T_{rot} = T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}^{(i)^2}$

Rotationsenergie

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- keine Translation $\Rightarrow$ $T_{rot} = T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}^{(i)2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{(i)}\right)^2 \omega^2$

Rotationsenergie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- keine Translation $\Rightarrow$ $T_{rot} = T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}^{(i)\,2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)}\right)^2 \omega^2$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2} \quad \text{mit} \quad J \equiv \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)}\right)^2$$

Trägheitsmoment (bzgl. der gegebenen Drehachse)

Rotationsenergie

- keine Translation $\Rightarrow\ T_{rot} = T = \sum_i \frac{m_i}{2}\,\dot{\vec{r}}^{(i)\,2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\,\left(\vec{n}\times\vec{r}^{\,(i)}\right)^2\omega^2$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2} \quad \text{mit} \quad J \equiv \sum_i m_i\,\left(\vec{n}\times\vec{r}^{\,(i)}\right)^2$$

Trägheitsmoment (bzgl. der gegebenen Drehachse)

- kontinuierliche Massenverteilung: $J = \int d^3r\,\rho(\vec{r})\,\left(\vec{n}\times\vec{r}\right)^2$

Rotationsenergie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- keine Translation $\Rightarrow \quad T_{rot} = T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}^{(i)\,2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{(i)}\right)^2 \omega^2$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_{rot} = \frac{1}{2} J\omega^2} \quad \text{mit} \quad J \equiv \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{(i)}\right)^2$$

Trägheitsmoment (bzgl. der gegebenen Drehachse)

- kontinuierliche Massenverteilung: $J = \int d^3r\, \rho(\vec{r}) \left(\vec{n} \times \vec{r}\right)^2$
- externe konservative Kräfte $\quad \rightarrow \quad V(\varphi)$

$$\Rightarrow \quad E = T_{rot} + V = \tfrac{1}{2} J\omega^2 + V = \tfrac{1}{2} J\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) = const.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{J}\left(E - V(\varphi)\right)}$$

Rotationsenergie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- keine Translation $\Rightarrow \quad T_{rot} = T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}^{(i)^2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{(i)}\right)^2 \omega^2$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2} \quad \text{mit} \quad J \equiv \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{(i)}\right)^2$$

Trägheitsmoment (bzgl. der gegebenen Drehachse)

- kontinuierliche Massenverteilung: $J = \int d^3r\, \rho(\vec{r}) \left(\vec{n} \times \vec{r}\right)^2$
- externe konservative Kräfte $\rightarrow \quad V(\varphi)$

$$\Rightarrow \quad E = T_{rot} + V = \tfrac{1}{2} J \omega^2 + V = \tfrac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) = const.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{\tfrac{2}{J} \left(E - V(\varphi)\right)}$$

$$\Rightarrow \quad t(\varphi) - t(\varphi_0) = \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{\frac{2}{J}(E - V(\varphi'))}} \quad \xrightarrow{\text{Umkehrung}} \quad \varphi(t)$$

Drehimpuls

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}^{\,(i)} \times m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)}\right)$$

Drehimpuls

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}^{\,(i)} \times m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)}\right)$$

doppeltes Kreuzprodukt: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

Drehimpuls

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}^{\,(i)} \times m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)}\right)$$

doppeltes Kreuzprodukt: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)2} \vec{\omega} - (\vec{r}^{\,(i)} \cdot \vec{\omega})\, \vec{r}^{\,(i)}\right)$$

Drehimpuls

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}^{\,(i)} \times m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)}\right)$$

doppeltes Kreuzprodukt: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)2} \vec{\omega} - (\vec{r}^{\,(i)} \cdot \vec{\omega})\, \vec{r}^{\,(i)}\right)$$

$\uparrow$

$\vec{L}$ ist i.A. nicht parallel zu $\vec{\omega}$!

Drehimpuls

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}^{\,(i)} \times m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)}\right)$$

doppeltes Kreuzprodukt: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)2} \vec{\omega} - (\vec{r}^{\,(i)} \cdot \vec{\omega})\, \underset{\substack{\uparrow \\ \vec{L} \text{ ist i.A. nicht parallel zu } \vec{\omega}\,!}}{\vec{r}^{\,(i)}}\right)$$

$\Rightarrow \quad \vec{L}$ ändert während der Rotation i.A. seine Richtung.

Drehimpuls

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}^{\,(i)} \times m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)}\right)$$

doppeltes Kreuzprodukt: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)2} \vec{\omega} - (\vec{r}^{\,(i)} \cdot \vec{\omega})\, \vec{r}^{\,(i)} \right)$$

$\uparrow$

$\vec{L}$ ist i.A. nicht parallel zu $\vec{\omega}$!

$\Rightarrow$ $\vec{L}$ ändert während der Rotation i.A. seine Richtung.

$\Rightarrow$ Die Befestigung der Drehachse übt i.A. ein Drehmoment aus.

Drehimpuls

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}^{\,(i)} \times m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)} = \sum_i m_i \vec{r}^{\,(i)} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)}\right)$$

doppeltes Kreuzprodukt: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \sum_i m_i \left({\vec{r}^{\,(i)}}^2 \vec{\omega} - (\vec{r}^{\,(i)} \cdot \vec{\omega})\, \vec{r}^{\,(i)} \right)$$

$\uparrow$

$\vec{L}$ ist i.A. nicht parallel zu $\vec{\omega}$!

$\Rightarrow$ $\vec{L}$ ändert während der Rotation i.A. seine Richtung.

$\Rightarrow$ Die Befestigung der Drehachse übt i.A. ein Drehmoment aus.

(umgekehrt:

kein Drehmoment $\Rightarrow \vec{L} = const. \overset{\text{i.A.}}{\Rightarrow}$ Drehachse ändert sich, s. später)

- Drehimpulsänderung insgesamt: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_{ex} = \sum_i \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}_{ex}^{(i)}$

  $\vec{F}_{ex}^{(i)} = \vec{F}_{Z}^{(i)} + \vec{F}_{\text{frei}}^{(i)}$

  - $\vec{F}_{Z}^{(i)}$: „Zwangskräfte“, die die einzelnen Teilchen in konstantem Abstand von der Drehachse halten
  - $\vec{F}_{\text{frei}}^{(i)}$: „freie Kräfte“, z.B. Schwerkraft

- Drehimpulsänderung insgesamt: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_{ex} = \sum_i \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}_{ex}^{(i)}$

  $\vec{F}_{ex}^{(i)} = \vec{F}_Z^{(i)} + \vec{F}_{\text{frei}}^{(i)}$

  - $\vec{F}_Z^{(i)}$: „Zwangskräfte", die die einzelnen Teilchen in konstantem Abstand von der Drehachse halten
  - $\vec{F}_{\text{frei}}^{(i)}$: „freie Kräfte", z.B. Schwerkraft

- Problem: $\vec{F}_Z^{(i)}$ nicht von vornherein bekannt ($\rightarrow$ Kap. 4, Lagrange-Mechanik)

- Drehimpulsänderung insgesamt: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_{ex} = \sum_i \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}_{ex}^{(i)}$

  $\vec{F}_{ex}^{(i)} = \vec{F}_Z^{(i)} + \vec{F}_{\text{frei}}^{(i)}$
  - $\vec{F}_Z^{(i)}$: „Zwangskräfte", die die einzelnen Teilchen in konstantem Abstand von der Drehachse halten
  - $\vec{F}_{\text{frei}}^{(i)}$: „freie Kräfte", z.B. Schwerkraft
- Problem: $\vec{F}_Z^{(i)}$ nicht von vornherein bekannt (→ Kap. 4, Lagrange-Mechanik)
- Betrachte $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$

  $\vec{F}_Z^{(i)}$ = Zentripetalkraft in Richtung Achse $= -F_Z^{(i)} \vec{e}_\rho$

- Drehimpulsänderung insgesamt: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_{ex} = \sum_i \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}_{ex}^{(i)}$

  $\vec{F}_{ex}^{(i)} = \vec{F}_Z^{(i)} + \vec{F}_{\text{frei}}^{(i)}$
  - $\vec{F}_Z^{(i)}$: „Zwangskräfte“, die die einzelnen Teilchen in konstantem Abstand von der Drehachse halten
  - $\vec{F}_{\text{frei}}^{(i)}$: „freie Kräfte“, z.B. Schwerkraft
- Problem: $\vec{F}_Z^{(i)}$ nicht von vornherein bekannt (→ Kap. 4, Lagrange-Mechanik)
- Betrachte $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$

  $\vec{F}_Z^{(i)}$ = Zentripetalkraft in Richtung Achse $= -F_Z^{(i)} \vec{e}_\rho$

  $\Rightarrow \ \vec{N}_Z^{(i)} = \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}_Z^{(i)} = -\rho^{(i)} F_Z^{(i)}\, \vec{e}_\rho \times \vec{e}_\rho - z^{(i)} F_Z^{(i)}\, \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = -z^{(i)} F_Z^{(i)}\, \vec{e}_\varphi$

- Drehimpulsänderung insgesamt: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_{ex} = \sum_i \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}_{ex}^{(i)}$

  $\vec{F}_{ex}^{(i)} = \vec{F}_Z^{(i)} + \vec{F}_{\text{frei}}^{(i)}$

  - $\vec{F}_Z^{(i)}$: „Zwangskräfte", die die einzelnen Teilchen in konstantem Abstand von der Drehachse halten
  - $\vec{F}_{\text{frei}}^{(i)}$: „freie Kräfte", z.B. Schwerkraft

- Problem: $\vec{F}_Z^{(i)}$ nicht von vornherein bekannt (➞ Kap. 4, Lagrange-Mechanik)
- Betrachte $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$

  $\vec{F}_Z^{(i)}$ = Zentripetalkraft in Richtung Achse $= -F_Z^{(i)} \vec{e}_\rho$

  $$\Rightarrow \vec{N}_Z^{(i)} = \vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}_Z^{(i)} = -\rho^{(i)} F_Z^{(i)}\, \vec{e}_\rho \times \vec{e}_\rho - z^{(i)} F_Z^{(i)}\, \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = -z^{(i)} F_Z^{(i)}\, \vec{e}_\varphi$$

  $$\Rightarrow \vec{N}_Z^{(i)} \perp \vec{\omega} \;\Rightarrow\; \vec{N}_Z = \sum N_Z^{(i)} \perp \vec{\omega}$$ keine Komponente in Achsenrichtung!

→ Betrachte nur die Komponente von $\vec{L}$ in Achsenrichtung:

$$L_n = \vec{L} \cdot \vec{n} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)} \times \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \right) \cdot \vec{n} = \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)} \right) \cdot \dot{\vec{r}}^{\,(i)}$$

→ Betrachte nur die Komponente von $\vec{L}$ in Achsenrichtung:

$$L_n = \vec{L} \cdot \vec{n} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)} \times \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \right) \cdot \vec{n} = \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)} \right) \cdot \dot{\vec{r}}^{\,(i)}$$

$$= \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)} \right) \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)} \right)$$

$$= \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)} \right)^2 \omega$$

→ Betrachte nur die Komponente von $\vec{L}$ in Achsenrichtung:

$$L_n = \vec{L} \cdot \vec{n} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)} \times \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \right) \cdot \vec{n} = \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)} \right) \cdot \dot{\vec{r}}^{\,(i)}$$

$$= \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)} \right) \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)} \right)$$

$$= \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)} \right)^2 \omega$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_n = J\omega = J\dot{\varphi}}$$

→ Betrachte nur die Komponente von $\vec{L}$ in Achsenrichtung:

$$L_n = \vec{L} \cdot \vec{n} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{\,(i)} \times \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \right) \cdot \vec{n} = \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)} \right) \cdot \dot{\vec{r}}^{\,(i)}$$

$$= \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)} \right) \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,(i)} \right)$$

$$= \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{\,(i)} \right)^2 \omega$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_n = J\omega = J\dot{\varphi}}$$

- $\frac{dL_n}{dt} = J\ddot{\varphi} = N_{ex,n} = \sum_i \left(\vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}_{ex}^{(i)} \right) \cdot \vec{n} = \sum_i \left(\vec{r}^{\,(i)} \times \vec{F}_{\text{frei}}^{(i)} \right) \cdot \vec{n}$

Nur die Drehmomente durch die freien Kräfte müssen berücksichtigt werden.