1.4.3 Energiesatz

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

1.4.3 Energiesatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Annahme: zentrale Zweiteilchenkäfte

$$\vec{F}^{(ij)} = f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \quad \vec{r}_{ij} = \vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}, \quad r_{ij} = \left|\vec{r}_{ij}\right|, \quad f^{ij}(r) = f^{ji}(r)$$

1.4.3 Energiesatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Annahme: zentrale Zweiteilchenkäfte

$$\vec{F}^{(ij)} = f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \quad \vec{r}_{ij} = \vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}, \quad r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|, \quad f^{ij}(r) = f^{ji}(r)$$

- $\vec{F}^{(ji)} = f^{ji}(r_{ji})\,\frac{\vec{r}_{ji}}{r_{ji}} = -f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} = -\vec{F}^{(ij)} \quad \checkmark$

1.4.3 Energiesatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Annahme: zentrale Zweiteilchenkäfte

$$\vec{F}^{(ij)} = f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \quad \vec{r}_{ij} = \vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}, \quad r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|, \quad f^{ij}(r) = f^{ji}(r)$$

- $\vec{F}^{(ji)} = f^{ji}(r_{ji})\,\frac{\vec{r}_{ji}}{r_{ji}} = -f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} = -\vec{F}^{(ij)} \quad \checkmark$
- lassen sich aus einem Potenzial ableiten, das nur vom Abstand abhängt:

$$\vec{F}^{(ij)} = -\vec{\nabla}^{(i)}\,V^{(ij)}, \quad V^{(ij)} = V^{(ij)}(r_{ij}) = V^{(ji)}(r_{ij}), \quad \vec{\nabla}^{(i)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \\ \frac{\partial}{\partial y^{(i)}} \\ \frac{\partial}{\partial z^{(i)}} \end{pmatrix} = \sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}$$

1.4.3 Energiesatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Annahme: zentrale Zweiteilchenkäfte

$$\vec{F}^{(ij)} = f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \quad \vec{r}_{ij} = \vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}, \quad r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|, \quad f^{ij}(r) = f^{ji}(r)$$

- $\vec{F}^{(ji)} = f^{ji}(r_{ji})\,\frac{\vec{r}_{ji}}{r_{ji}} = -f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} = -\vec{F}^{(ij)} \quad \checkmark$
- lassen sich aus einem Potenzial ableiten, das nur vom Abstand abhängt:

$$\vec{F}^{(ij)} = -\vec{\nabla}^{(i)}\,V^{(ij)}, \quad V^{(ij)} = V^{(ij)}(r_{ij}) = V^{(ji)}(r_{ij}), \quad \vec{\nabla}^{(i)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \\ \frac{\partial}{\partial y^{(i)}} \\ \frac{\partial}{\partial z^{(i)}} \end{pmatrix} = \sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}^{(ij)} = -\sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}\,V^{(ij)}(r_{ij})$$

1.4.3 Energiesatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Annahme: zentrale Zweiteilchenkäfte

$$\vec{F}^{(ij)} = f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \quad \vec{r}_{ij} = \vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}, \quad r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|, \quad f^{ij}(r) = f^{ji}(r)$$

- $\vec{F}^{(ji)} = f^{ji}(r_{ji})\,\frac{\vec{r}_{ji}}{r_{ji}} = -f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} = -\vec{F}^{(ij)} \quad \checkmark$
- lassen sich aus einem Potenzial ableiten, das nur vom Abstand abhängt:

$$\vec{F}^{(ij)} = -\vec{\nabla}^{(i)}\,V^{(ij)}, \quad V^{(ij)} = V^{(ij)}(r_{ij}) = V^{(ji)}(r_{ij}), \quad \vec{\nabla}^{(i)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \\ \frac{\partial}{\partial y^{(i)}} \\ \frac{\partial}{\partial z^{(i)}} \end{pmatrix} = \sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}^{(ij)} = -\sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}\,V^{(ij)}(r_{ij}) \;= -\sum_k \vec{e}_k\,\frac{dV^{(ij)}(r_{ij})}{dr_{ij}}\,\frac{\partial r_{ij}}{\partial r_k^{(i)}} \equiv -V^{(ij)\prime}(r_{ij})\sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial r_{ij}}{\partial r_k^{(i)}}$$

1.4.3 Energiesatz

Annahme: zentrale Zweiteilchenkäfte

$$\vec{F}^{(ij)} = f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \quad \vec{r}_{ij} = \vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}, \quad r_{ij} = \left|\vec{r}_{ij}\right|, \quad f^{ij}(r) = f^{ji}(r)$$

- $\vec{F}^{(ji)} = f^{ji}(r_{ji})\,\frac{\vec{r}_{ji}}{r_{ji}} = -f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} = -\vec{F}^{(ij)} \quad \checkmark$
- lassen sich aus einem Potenzial ableiten, das nur vom Abstand abhängt:

$$\vec{F}^{(ij)} = -\vec{\nabla}^{(i)}\,V^{(ij)}, \quad V^{(ij)} = V^{(ij)}(r_{ij}) = V^{(ji)}(r_{ij}), \quad \vec{\nabla}^{(i)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \\ \frac{\partial}{\partial y^{(i)}} \\ \frac{\partial}{\partial z^{(i)}} \end{pmatrix} = \sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}^{(ij)} = -\sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}\,V^{(ij)}(r_{ij}) = -\sum_k \vec{e}_k\,\frac{dV^{(ij)}(r_{ij})}{dr_{ij}}\,\frac{\partial r_{ij}}{\partial r_k^{(i)}} \equiv -V^{(ij)\prime}(r_{ij})\sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial r_{ij}}{\partial r_k^{(i)}}$$

$$\frac{\partial r_{ij}}{\partial r_k^{(i)}} = \frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}\left(\sum_\ell \left(r_\ell^{(i)} - r_\ell^{(j)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{r_k^{(i)} - r_k^{(j)}}{r_{ij}}$$

1.4.3 Energiesatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Annahme: zentrale Zweiteilchenkäfte

$$\vec{F}^{(ij)} = f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \quad \vec{r}_{ij} = \vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}, \quad r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|, \quad f^{ij}(r) = f^{ji}(r)$$

- $\vec{F}^{(ji)} = f^{ji}(r_{ji})\,\frac{\vec{r}_{ji}}{r_{ji}} = -f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} = -\vec{F}^{(ij)} \quad \checkmark$
- lassen sich aus einem Potenzial ableiten, das nur vom Abstand abhängt:

$$\vec{F}^{(ij)} = -\vec{\nabla}^{(i)}\,V^{(ij)}, \quad V^{(ij)} = V^{(ij)}(r_{ij}) = V^{(ji)}(r_{ij}), \quad \vec{\nabla}^{(i)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \\ \frac{\partial}{\partial y^{(i)}} \\ \frac{\partial}{\partial z^{(i)}} \end{pmatrix} = \sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}^{(ij)} = -\sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}\,V^{(ij)}(r_{ij}) = -\sum_k \vec{e}_k\,\frac{dV^{(ij)}(r_{ij})}{dr_{ij}}\,\frac{\partial r_{ij}}{\partial r_k^{(i)}} \equiv -V^{(ij)\prime}(r_{ij})\sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial r_{ij}}{\partial r_k^{(i)}}$$

$$\frac{\partial r_{ij}}{\partial r_k^{(i)}} = \frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}\left(\sum_\ell \left(r_\ell^{(i)} - r_\ell^{(j)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{r_k^{(i)} - r_k^{(j)}}{r_{ij}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}^{(ij)} = -V^{(ij)\prime}(r_{ij})\sum_k \vec{e}_k\,\frac{r_k^{(i)} - r_k^{(j)}}{r_{ij}} = -V^{(ij)\prime}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$$

1.4.3 Energiesatz

Annahme: zentrale Zweiteilchenkäfte

$$\vec{F}^{(ij)} = f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \quad \vec{r}_{ij} = \vec{r}^{\,(i)} - \vec{r}^{\,(j)}, \quad r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|, \quad f^{ij}(r) = f^{ji}(r)$$

- $\vec{F}^{(ji)} = f^{ji}(r_{ji})\,\frac{\vec{r}_{ji}}{r_{ji}} = -f^{ij}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} = -\vec{F}^{(ij)} \quad \checkmark$
- lassen sich aus einem Potenzial ableiten, das nur vom Abstand abhängt:

$$\vec{F}^{(ij)} = -\vec{\nabla}^{(i)}\,V^{(ij)}, \quad V^{(ij)} = V^{(ij)}(r_{ij}) = V^{(ji)}(r_{ij}), \quad \vec{\nabla}^{(i)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \\ \frac{\partial}{\partial y^{(i)}} \\ \frac{\partial}{\partial z^{(i)}} \end{pmatrix} = \sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}^{(ij)} = -\sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}\,V^{(ij)}(r_{ij}) = -\sum_k \vec{e}_k\,\frac{dV^{(ij)}(r_{ij})}{dr_{ij}}\,\frac{\partial r_{ij}}{\partial r_k^{(i)}} \equiv -V^{(ij)\prime}(r_{ij})\sum_k \vec{e}_k\,\frac{\partial r_{ij}}{\partial r_k^{(i)}}$$

$$\frac{\partial r_{ij}}{\partial r_k^{(i)}} = \frac{\partial}{\partial r_k^{(i)}}\left(\sum_\ell \left(r_\ell^{(i)} - r_\ell^{(j)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{r_k^{(i)} - r_k^{(j)}}{r_{ij}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}^{(ij)} = -V^{(ij)\prime}(r_{ij})\sum_k \vec{e}_k\,\frac{r_k^{(i)} - r_k^{(j)}}{r_{ij}} = -V^{(ij)\prime}(r_{ij})\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \qquad \Rightarrow \quad f^{ij}(r) = -V^{(ij)\prime}(r) \quad \checkmark$$

- zentrale Zweiteilchenkräfte + externe Kräfte:

$$m_i \, \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} \overset{\text{N2}}{=} \sum_{j \neq i} \left(-\vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)} \right) + \vec{F}_{ex}^{(i)}$$

- zentrale Zweiteilchenkräfte + externe Kräfte:

$$m_i \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} \overset{\text{N2}}{=} \sum_{j \neq i} \left(-\vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)} \right) + \vec{F}_{ex}^{(i)} \qquad \Big| \sum_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \ddot{\vec{r}}^{\,(i)} = -\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)} + \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \vec{F}_{ex}^{(i)}$$

- zentrale Zweiteilchenkräfte + externe Kräfte:

$$m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} \overset{\text{N2}}{=} \sum_{j \neq i} \left(-\vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)} \right) + \vec{F}_{ex}^{(i)} \qquad \Big| \sum_i \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \ddot{\vec{r}}^{(i)} = -\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)} + \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{F}_{ex}^{(i)}$$

  - $m_i \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \ddot{\vec{r}}^{(i)} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_i}{2} \vec{v}^{(i)2} \right)$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- zentrale Zweiteilchenkräfte + externe Kräfte:

$$m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} \overset{\text{N2}}{=} \sum_{j \neq i} \left(-\vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)} \right) + \vec{F}_{ex}^{(i)} \qquad \Big| \sum_i \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \ddot{\vec{r}}^{(i)} = -\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)} + \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{F}_{ex}^{(i)}$$

  - $m_i \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \ddot{\vec{r}}^{(i)} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_i}{2} \vec{v}^{(i)2} \right)$
  - $-\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)} = -\sum_{i<j} \left(\dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{\nabla}^{(i)} + \dot{\vec{r}}^{(j)} \cdot \vec{\nabla}^{(j)} \right) V^{(ij)} = -\sum_{i<j} \frac{d}{dt} V^{(ij)}$

- zentrale Zweiteilchenkräfte + externe Kräfte:

$$m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} \overset{\text{N2}}{=} \sum_{j \neq i} \left(-\vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)} \right) + \vec{F}_{ex}^{(i)} \qquad \Big| \sum_i \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \ddot{\vec{r}}^{(i)} = -\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)} + \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{F}_{ex}^{(i)}$$

  - $m_i \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \ddot{\vec{r}}^{(i)} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_i}{2} \vec{v}^{(i)2} \right)$
  - $-\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)} = -\sum_{i<j} \left(\dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{\nabla}^{(i)} + \dot{\vec{r}}^{(j)} \cdot \vec{\nabla}^{(j)} \right) V^{(ij)} = -\sum_{i<j} \frac{d}{dt} V^{(ij)}$

denn: $\frac{d}{dt} V^{(ij)} = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial V^{(ij)}}{\partial r_k^{(i)}} \dot{r}_k^{(i)} + \frac{\partial V^{(ij)}}{\partial r_k^{(j)}} \dot{r}_k^{(j)} \right) = \left(\dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{\nabla}^{(i)} + \dot{\vec{r}}^{(j)} \cdot \vec{\nabla}^{(j)} \right) V^{(ij)}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{m_i}{2}\,\vec{v}^{\,(i)^2}\right) = -\frac{d}{dt}\sum_{i<j} V^{(ij)} + \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \vec{F}_{ex}^{(i)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{m_i}{2}\vec{v}^{\,(i)2}\right) = -\frac{d}{dt}\sum_{i<j} V^{(ij)} + \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \vec{F}_{ex}^{(i)}$$

→ Energiesatz: $\boxed{\dfrac{dE}{dt} \equiv \dfrac{d}{dt}(T+V) = \sum_{i=1}^{N} \vec{v}^{\,(i)} \cdot \vec{F}_{ex}^{(i)}}$

- $T = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{m_i}{2}\vec{v}^{\,(i)2}\right)$ kinetische Energie des Gesamtsystems
- $V = \sum_{i<j} V^{(ij)}$ innere potenzielle Energie
- $E = T + V$ „innere Energie"

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{m_i}{2}\vec{v}^{\,(i)2}\right) = -\frac{d}{dt}\sum_{i<j} V^{(ij)} + \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \vec{F}_{ex}^{(i)}$$

→ Energiesatz: $\boxed{\frac{dE}{dt} \equiv \frac{d}{dt}(T+V) = \sum_{i=1}^{N} \vec{v}^{\,(i)} \cdot \vec{F}_{ex}^{(i)}}$

- $T = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{m_i}{2}\vec{v}^{\,(i)2}\right)$ kinetische Energie des Gesamtsystems
- $V = \sum_{i<j} V^{(ij)}$ innere potenzielle Energie
- $E = T + V$ „innere Energie“
- $\sum_{i=1}^{N} \vec{v}^{\,(i)} \cdot \vec{F}_{ex}^{(i)}$ Leistung (Arbeit pro Zeit) der externen Kräfte

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{m_i}{2} \vec{v}^{\,(i)2} \right) = -\frac{d}{dt} \sum_{i<j} V^{(ij)} + \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}^{\,(i)} \cdot \vec{F}_{ex}^{(i)}$$

→ Energiesatz: $$\boxed{\frac{dE}{dt} \equiv \frac{d}{dt}(T+V) = \sum_{i=1}^{N} \vec{v}^{\,(i)} \cdot \vec{F}_{ex}^{(i)}}$$

- $T = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{m_i}{2} \vec{v}^{\,(i)2} \right)$ kinetische Energie des Gesamtsystems
- $V = \sum_{i<j} V^{(ij)}$ innere potenzielle Energie
- $E = T + V$ „innere Energie“
- $\sum_{i=1}^{N} \vec{v}^{\,(i)} \cdot \vec{F}_{ex}^{(i)}$ Leistung (Arbeit pro Zeit) der externen Kräfte

$$\left(dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

1.4.4 Abgeschlossene Systeme

1.4.4 Abgeschlossene Systeme

abgeschlossen: $F_{ex}^{(i)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \vec{N}_{ex} = \vec{0}$

zusätzliche Annnahme: zentrale innere Zweiteilchenkräfte

1.4.4 Abgeschlossene Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

abgeschlossen: $F_{ex}^{(i)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{N}_{ex} = \vec{0}$

zusätzliche Annahme: zentrale innere Zweiteilchenkräfte

→ Erhaltungsgrößen:

- Gesamtimpuls: $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = const.$
- Gesamtdrehimpuls: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = const.$
- innere Energie: $\frac{d}{dt}(T + V) = 0 \quad \Rightarrow \quad E = T + V = const.$

1.4.4 Abgeschlossene Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Erhaltungsgrößen:

- Gesamtimpuls: $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = const.$
- Gesamtdrehimpuls: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = const.$
- innere Energie: $\frac{d}{dt}\,(T + V) = 0 \quad \Rightarrow \quad E = T + V = const.$

1.4.4 Abgeschlossene Systeme

Erhaltungsgrößen:

- Gesamtimpuls: $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = const.$

  $\vec{P} = M\dot{\vec{R}} \quad \Rightarrow \quad \vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \frac{1}{M}\vec{P}t$

- Gesamtdrehimpuls: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = const.$

- innere Energie: $\frac{d}{dt}\,(T + V) = 0 \quad \Rightarrow \quad E = T + V = const.$

1.4.4 Abgeschlossene Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Erhaltungsgrößen:

- Gesamtimpuls: $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = const.$

  $\vec{P} = M\dot{\vec{R}} \quad \Rightarrow \quad \vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \frac{1}{M}\vec{P}t$

- Gesamtdrehimpuls: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = const.$

  $$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{L}_{in} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \underbrace{\vec{R}_0 \times \vec{P}}_{=const.} + \frac{1}{M}t\,\underbrace{\vec{P} \times \vec{P}}_{=\vec{0}} + \vec{L}_{in} = const. \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_{in} = const.$$

- innere Energie: $\frac{d}{dt}\,(T + V) = 0 \quad \Rightarrow \quad E = T + V = const.$

1.4.4 Abgeschlossene Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Erhaltungsgrößen:

- Gesamtimpuls: $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = const.$

  $\vec{P} = M\dot{\vec{R}} \quad \Rightarrow \quad \vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \frac{1}{M}\vec{P}t$

- Gesamtdrehimpuls: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = const.$

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{L}_{in} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \underbrace{\vec{R}_0 \times \vec{P}}_{=const.} + \frac{1}{M}t\,\underbrace{\vec{P} \times \vec{P}}_{=\vec{0}} + \vec{L}_{in} = const. \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_{in} = const.$$

- innere Energie: $\frac{d}{dt}\,(T + V) = 0 \quad \Rightarrow \quad E = T + V = const.$

→ 10 Erhaltungsgrößen: $\underbrace{\vec{R}_0,\ \vec{P},\ \vec{L}\,(\text{oder } \vec{L}_{in}),}_{\text{jeweils 3 Komponenten}}\ E$

2. Kepler-Problem

2.1 Schwerpunkts- und Relativbewegung des Zweikörpersystems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2.1 Schwerpunkts- und Relativbewegung des Zweikörpersystems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- zwei Punktmassen m_1 und m_2
  - innere Kräften $\vec{F}^{(12)} = -\vec{F}^{(21)} \equiv \vec{F}$
  - keine äußeren Kräfte

2.1 Schwerpunkts- und Relativbewegung des Zweikörpersystems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- zwei Punktmassen m_1 und m_2
  - innere Kräften $\vec{F}^{(12)} = -\vec{F}^{(21)} \equiv \vec{F}$
  - keine äußeren Kräfte
- Bewegungsgleichungen:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}^{\,(1)} = \vec{F} \qquad (1)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}^{\,(2)} = -\vec{F} \qquad (2)$$

(6 gekoppelte Dgln. 2. Ordnung für die Komponenten von $\vec{r}^{\,(1)}$ und $\vec{r}^{\,(2)}$)

2.1 Schwerpunkts- und Relativbewegung des Zweikörpersystems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- zwei Punktmassen m_1 und m_2
  - innere Kräften $\vec{F}^{(12)} = -\vec{F}^{(21)} \equiv \vec{F}$
  - keine äußeren Kräfte
- Bewegungsgleichungen:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}^{\,(1)} = \vec{F} \qquad (1)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}^{\,(2)} = -\vec{F} \qquad (2)$$

(6 gekoppelte Dgln. 2. Ordnung für die Komponenten von $\vec{r}^{\,(1)}$ und $\vec{r}^{\,(2)}$)

- Schwerpunkts- und Relativkoordinaten:

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\left(m_1 \vec{r}^{\,(1)} + m_2 \vec{r}^{\,(2)}\right), \qquad \vec{r} \equiv \vec{r}_{12} = \vec{r}^{\,(1)} - \vec{r}^{\,(2)}, \qquad M = m_1 + m_2$$

2.1 Schwerpunkts- und Relativbewegung des Zweikörpersystems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- zwei Punktmassen m_1 und m_2
  - innere Kräften $\vec{F}^{(12)} = -\vec{F}^{(21)} \equiv \vec{F}$
  - keine äußeren Kräfte
- Bewegungsgleichungen:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}^{\,(1)} = \vec{F} \qquad (1)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}^{\,(2)} = -\vec{F} \qquad (2)$$

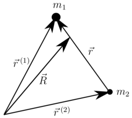
(6 gekoppelte Dgln. 2. Ordnung für die Komponenten von $\vec{r}^{\,(1)}$ und $\vec{r}^{\,(2)}$)

- Schwerpunkts- und Relativkoordinaten:

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\left(m_1 \vec{r}^{\,(1)} + m_2 \vec{r}^{\,(2)}\right), \qquad \vec{r} \equiv \vec{r}_{12} = \vec{r}^{\,(1)} - \vec{r}^{\,(2)}, \qquad M = m_1 + m_2$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}^{\,(1)} = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\,\vec{r}$$

$$\vec{r}^{\,(2)} = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\,\vec{r}$$



- **1. Schwerpunktsbewegung**

$$(1) + (2) \quad \Rightarrow \quad M\ddot{\vec{R}} = m_1\ddot{\vec{r}}^{\,(1)} + m_2\ddot{\vec{r}}^{\,(2)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = M\dot{\vec{R}} = const.$$

- **1. Schwerpunktsbewegung**

$$(1) + (2) \quad \Rightarrow \quad M\ddot{\vec{R}} = m_1\ddot{\vec{r}}^{\,(1)} + m_2\ddot{\vec{r}}^{\,(2)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = M\dot{\vec{R}} = const.$$

- **2. Relativbewegung**

$$m_2 \cdot (1) - m_1 \cdot (2) \quad \Rightarrow \quad m_1 m_2\, \ddot{\vec{r}} = m_1 m_2 \left(\ddot{\vec{r}}^{\,(1)} - \ddot{\vec{r}}^{\,(2)}\right) = (m_1 + m_2)\vec{F}$$

- **1. Schwerpunktsbewegung**

$$(1) + (2) \quad \Rightarrow \quad M\ddot{\vec{R}} = m_1\ddot{\vec{r}}^{(1)} + m_2\ddot{\vec{r}}^{(2)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = M\dot{\vec{R}} = const.$$

- **2. Relativbewegung**

$$m_2 \cdot (1) - m_1 \cdot (2) \quad \Rightarrow \quad m_1 m_2 \ddot{\vec{r}} = m_1 m_2 \left(\ddot{\vec{r}}^{(1)} - \ddot{\vec{r}}^{(2)}\right) = (m_1 + m_2)\vec{F}$$

Def.: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ „reduzierte Masse" $\Rightarrow$ $\boxed{\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}}$

Die Relativbewegung des Zweiteilchensystems verhält sich so wie die Bewegung eines einzelnen Teilchens mit der reduzierten Masse μ unter dem Einfluss der Kraft $\vec{F}$!

(Reduktion des Zweiteilchen-Problems auf ein äquivalentes Einteilchen-Problem)

Reduzierte Masse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad \mu M = m_1 m_2, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

Reduzierte Masse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad \mu M = m_1 m_2, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

- Spezialfälle:
  - $m_1 = m_2 \equiv m \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2}$

Reduzierte Masse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad \mu M = m_1 m_2, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

- Spezialfälle:
  - $m_1 = m_2 \equiv m \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2}$
  - $m_1 \ll m_2 \quad \Rightarrow \quad \mu \approx \frac{m_1 m_2}{m_2} = m_1$

Reduzierte Masse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad \mu M = m_1 m_2, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

- Spezialfälle:
  - $m_1 = m_2 \equiv m \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2}$
  - $m_1 \ll m_2 \quad \Rightarrow \quad \mu \approx \frac{m_1 m_2}{m_2} = m_1$
- Beispiel. Erde und Sonne: $m_♁ = 3 \cdot 10^{-6}\, m_\odot$

$$\Rightarrow \qquad \mu \approx m_♁, \qquad M \approx m_\odot, \qquad \vec{r}_\odot \approx \vec{R}, \qquad \vec{r}_♁ \approx \vec{R} + \vec{r}$$

Reduzierte Masse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad \mu M = m_1 m_2, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

- Spezialfälle:
  - $m_1 = m_2 \equiv m \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2}$
  - $m_1 \ll m_2 \quad \Rightarrow \quad \mu \approx \frac{m_1 m_2}{m_2} = m_1$
- Beispiel. Erde und Sonne: $m_{\oplus} = 3 \cdot 10^{-6}\, m_{\odot}$

$$\Rightarrow \quad \mu \approx m_{\oplus}, \quad M \approx m_{\odot}, \quad \vec{r}_{\odot} \approx \vec{R}, \quad \vec{r}_{\oplus} \approx \vec{R} + \vec{r}$$

→ Im Schwerpunktsystem ($\vec{R} = \vec{0}$) ruht die Sonne in sehr guter Näherung am Koordinatenursprung, und $\vec{r}$ entspricht der Position der Erde.

Reduzierte Masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad \mu M = m_1 m_2, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

- Spezialfälle:
  - $m_1 = m_2 \equiv m \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2}$
  - $m_1 \ll m_2 \quad \Rightarrow \quad \mu \approx \frac{m_1 m_2}{m_2} = m_1$

- Beispiel. Erde und Sonne: $m_{\text{♁}} = 3 \cdot 10^{-6}\, m_{\odot}$

$$\Rightarrow \qquad \mu \approx m_{\text{♁}}, \qquad M \approx m_{\odot}, \qquad \vec{r}_{\odot} \approx \vec{R}, \qquad \vec{r}_{\text{♁}} \approx \vec{R} + \vec{r}$$

→ Im Schwerpunktsystem ($\vec{R} = \vec{0}$) ruht die Sonne in sehr guter Näherung am Koordinatenursprung, und $\vec{r}$ entspricht der Position der Erde.

- Notation:
  Im Folgenden schreiben wir oft m statt μ, wenn wir nicht explizit betonen wollen, dass es sich um die reduzierte Masse handelt.

2.2 Zentralkäfte

2.2 Zentralkäfte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\vec{F}$ zentrale Zweiteilchenkraft

  → äquivalentes Einteilchen-Problem:

  Teilchen mit Masse $m \equiv \mu$ im Feld einer Zentralkraft $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\,\frac{\vec{r}}{r}$

  - Richtung: entlang der Verbindungslinie zum Ursprung
  - Stärke: hängt nur vom Betrag $r = |\vec{r}|$ ab

2.2 Zentralkäfte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\vec{F}$ zentrale Zweiteilchenkraft

  → äquivalentes Einteilchen-Problem:

  Teilchen mit Masse $m \equiv \mu$ im Feld einer Zentralkraft $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\,\frac{\vec{r}}{r}$
  - Richtung: entlang der Verbindungslinie zum Ursprung
  - Stärke: hängt nur vom Betrag $r = |\vec{r}|$ ab
- Eigenschaften:
  - $\vec{F}$ ist konservativ
  - $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(r), \quad f(r) = -\frac{dV}{dr}(r)$

2.2 Zentralkäfte

- $\vec{F}$ zentrale Zweiteilchenkraft

  $\rightarrow$ äquivalentes Einteilchen-Problem:

  Teilchen mit Masse $m \equiv \mu$ im Feld einer Zentralkraft $\quad \vec{F}(\vec{r}) = f(r)\,\frac{\vec{r}}{r}$
  - Richtung: entlang der Verbindungslinie zum Ursprung
  - Stärke: hängt nur vom Betrag $r = |\vec{r}|$ ab
- Eigenschaften:
  - $\vec{F}$ ist konservativ
  - $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(r), \quad f(r) = -\frac{dV}{dr}(r)$

    Bsp. Gravitationspotenzial: $\quad V_G(r) = -G\,\frac{m_1 m_2}{r} = -G\,\frac{mM}{r} \quad (m \equiv \mu)$

2.2 Zentralkäfte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\vec{F}$ zentrale Zweiteilchenkraft

  → äquivalentes Einteilchen-Problem:

  Teilchen mit Masse $m \equiv \mu$ im Feld einer Zentralkraft $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\,\frac{\vec{r}}{r}$

  - Richtung: entlang der Verbindungslinie zum Ursprung
  - Stärke: hängt nur vom Betrag $r = |\vec{r}|$ ab

- Eigenschaften:
  - $\vec{F}$ ist konservativ
  - $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(r), \quad f(r) = -\frac{dV}{dr}(r)$

    Bsp. Gravitationspotenzial: $V_G(r) = -G\,\frac{m_1 m_2}{r} = -G\,\frac{mM}{r} \quad (m \equiv \mu)$
  - Drehmoment: $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}) = \frac{f(r)}{r}\,\underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_{=\vec{0}} = \vec{0}$

2.2 Zentralkäfte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\vec{F}$ zentrale Zweiteilchenkraft

  → äquivalentes Einteilchen-Problem:

  Teilchen mit Masse $m \equiv \mu$ im Feld einer Zentralkraft $\quad \vec{F}(\vec{r}) = f(r)\,\frac{\vec{r}}{r}$

  - Richtung: entlang der Verbindungslinie zum Ursprung
  - Stärke: hängt nur vom Betrag $r = |\vec{r}|$ ab

- Eigenschaften:
  - $\vec{F}$ ist konservativ
  - $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(r), \quad f(r) = -\frac{dV}{dr}(r)$

    Bsp. Gravitationspotenzial: $V_G(r) = -G\,\frac{m_1 m_2}{r} = -G\,\frac{mM}{r} \quad (m \equiv \mu)$
  - Drehmoment: $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}) = \frac{f(r)}{r}\,\underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_{=\vec{0}} = \vec{0}$

  $\Rightarrow$ Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = const.$ $\quad$ (vgl. Abschnitt 1.4)

Konsequenzen der Drehimpulserhaltung

Konsequenzen der Drehimpulserhaltung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \quad \Rightarrow \quad \vec{L} \perp \vec{r}, \dot{\vec{r}}$

  Änderung von $\vec{r}$ im Zeitintervall dt: $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}\, dt \quad \Rightarrow \quad \vec{r}, d\vec{r} \perp \vec{L} = const.$

Konsequenzen der Drehimpulserhaltung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \quad \Rightarrow \quad \vec{L} \perp \vec{r}, \dot{\vec{r}}$

  Änderung von $\vec{r}$ im Zeitintervall dt: $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}\, dt \quad \Rightarrow \quad \vec{r}, d\vec{r} \perp \vec{L} = const.$

  → Die Bewegung findet in einer festen Ebene $\perp \vec{L}$ statt.

Konsequenzen der Drehimpulserhaltung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \quad \Rightarrow \quad \vec{L} \perp \vec{r}, \dot{\vec{r}}$

  Änderung von $\vec{r}$ im Zeitintervall dt: $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}\, dt \quad \Rightarrow \quad \vec{r}, d\vec{r} \perp \vec{L} = const.$

  ➞ Die Bewegung findet in einer festen Ebene $\perp \vec{L}$ statt.

- Zweites Kepler'sches Gesetz:

  Die Verbindungslinie zwischen einem Planeten und der Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (abhängig vom jeweiligen Planeten).

Konsequenzen der Drehimpulserhaltung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

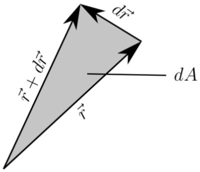
- $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \quad \Rightarrow \quad \vec{L} \perp \vec{r}, \dot{\vec{r}}$

  Änderung von $\vec{r}$ im Zeitintervall dt: $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}\, dt \quad \Rightarrow \quad \vec{r}, d\vec{r} \perp \vec{L} = const.$

  ➞ Die Bewegung findet in einer festen Ebene $\perp \vec{L}$ statt.

- Zweites Kepler'sches Gesetz:

  Die Verbindungslinie zwischen einem Planeten und der Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (abhängig vom jeweiligen Planeten).



$$dA = \frac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{r}|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = \frac{|\vec{L}|}{2m} = const.$$

Konsequenzen der Drehimpulserhaltung

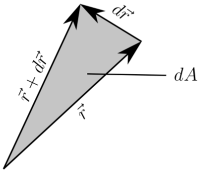
- $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \quad \Rightarrow \quad \vec{L} \perp \vec{r}, \dot{\vec{r}}$

  Änderung von $\vec{r}$ im Zeitintervall dt: $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}\, dt \quad \Rightarrow \quad \vec{r}, d\vec{r} \perp \vec{L} = const.$

  ➞ Die Bewegung findet in einer festen Ebene $\perp \vec{L}$ statt.

- Zweites Kepler'sches Gesetz:

  Die Verbindungslinie zwischen einem Planeten und der Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (abhängig vom jeweiligen Planeten).



$$dA = \frac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{r}|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = \frac{|\vec{L}|}{2m} = const.$$

beruht nur auf der Drehimpulserhaltung, nicht auf dem Gravitationsgesetz!