N-Boson- und N-Fermion-Systeme

- (Anti-)Symmetrisierungsoperator: $S_\pm |i_1, \dots, i_N\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P \in S_N} (\pm 1)^P \, P |i_1, \dots, i_N\rangle$

N-Boson- und N-Fermion-Systeme

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- (Anti-)Symmetrisierungsoperator: $S_\pm |i_1, \dots, i_N\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P \in S_N} (\pm 1)^P \, P |i_1, \dots, i_N\rangle$

- vollständige Orthonormalbasis für N identische Fermionen:

$$S_- |i_1, \dots, i_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P \in S_N} (-1)^P \, P |i_1, \dots, i_N\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} |i_1\rangle_1 & \dots & |i_1\rangle_N \\ \vdots & & \vdots \\ |i_N\rangle_1 & \dots & |i_N\rangle_N \end{vmatrix}$$

„Slater-Determinante"

N-Boson- und N-Fermion-Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- (Anti-)Symmetrisierungsoperator: $S_\pm \left|i_1, \dots, i_N\right\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum\limits_{P \in S_N} (\pm 1)^P \, P \left|i_1, \dots, i_N\right\rangle$
- vollständige Orthonormalbasis für N identische Fermionen:

$$S_- \left|i_1, \dots, i_N\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P \in S_N} (-1)^P \, P \left|i_1, \dots, i_N\right\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \left|i_1\right\rangle_1 & \dots & \left|i_1\right\rangle_N \\ \vdots & & \vdots \\ \left|i_N\right\rangle_1 & \dots & \left|i_N\right\rangle_N \end{vmatrix}$$

„Slater-Determinante"

Insbesondere ist das Pauli-Prinzip erfüllt:

$S_- \left|i_1, \dots, i_N\right\rangle = 0$, falls $\left|i_i\right\rangle = \left|i_j\right\rangle$ für beliebige $i \neq j$

N-Boson- und N-Fermion-Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- (Anti-)Symmetrisierungsoperator: $S_\pm |i_1, \ldots, i_N\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P \in S_N} (\pm 1)^P \, P |i_1, \ldots, i_N\rangle$

- vollständige Orthonormalbasis für N identische Fermionen:

$$S_- |i_1, \ldots, i_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P \in S_N} (-1)^P \, P |i_1, \ldots, i_N\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} |i_1\rangle_1 & \ldots & |i_1\rangle_N \\ \vdots & & \vdots \\ |i_N\rangle_1 & \ldots & |i_N\rangle_N \end{vmatrix}$$

„Slater-Determinante"

Insbesondere ist das Pauli-Prinzip erfüllt:

$S_- |i_1, \ldots, i_N\rangle = 0$, falls $|i_i\rangle = |i_j\rangle$ für beliebige $i \neq j$

- Beispiel $N = 2$: $S_- |i, j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|i, j\rangle - |j, i\rangle \right)$

- vollständige Orthonormalbasis für N identische Bosonen:

$$\frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!\ldots}} S_+ |i_1, \ldots, i_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!n_1!n_2!\ldots}} \sum_{P \in S_N} P |i_1, \ldots, i_N\rangle$$

  - n_i = Zahl der Teilchen im Einteilchenzustand $|i\rangle$

- vollständige Orthonormalbasis für N identische Bosonen:

$$\frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!\dots}} S_+ |i_1, \dots, i_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!n_1!n_2!\dots}} \sum_{P \in S_N} P |i_1, \dots, i_N\rangle$$

  - n_i = Zahl der Teilchen im Einteilchenzustand $|i\rangle$
  - Begründung des zusätzlichen Normierungsfaktors:

    Für n_{j_1} Teilchen im Zustand $|j_1\rangle$, n_{j_2} Teilchen im Zustand $|j_2\rangle$ etc. liefern die N! Permutationen aus S_N nur $\frac{N!}{n_{j_1}!n_{j_2}!\dots}$ unterschiedliche Zustände, die jeweils $n_{j_1}!n_{j_2}!\dots$-mal auftreten.

- vollständige Orthonormalbasis für N identische Bosonen:

$$\frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!\dots}} S_+ \big|i_1, \dots, i_N\big\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!n_1!n_2!\dots}} \sum_{P \in S_N} P \big|i_1, \dots, i_N\big\rangle$$

  - n_i = Zahl der Teilchen im Einteilchenzustand $|i\rangle$
  - Begründung des zusätzlichen Normierungsfaktors:

    Für n_{j_1} Teilchen im Zustand $|j_1\rangle$, n_{j_2} Teilchen im Zustand $|j_2\rangle$ etc. liefern die N! Permutationen aus S_N nur $\frac{N!}{n_{j_1}!n_{j_2}!\dots}$ unterschiedliche Zustände, die jeweils $n_{j_1}!n_{j_2}!\dots$-mal auftreten.
  - Beispiel:

$$\frac{1}{\sqrt{n_i!n_j!}} S_+ \big|i, i, j\big\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!1!}} \frac{1}{\sqrt{3!}} \Big(2\big|i, i, j\big\rangle + 2\big|i, j, i\big\rangle + 2\big|j, i, i\big\rangle\Big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \Big(\big|i, i, j\big\rangle + \big|i, j, i\big\rangle + \big|j, i, i\big\rangle\Big) \quad \checkmark$$

4.2 Besetzungszahl-Darstellung

4.2 Besetzungszahl-Darstellung

- N identische Teilchen: nur total (anti-) symmetrische Zustände

  $\Rightarrow$ Basis $\{|i_1, ..., i_N\rangle\}$ (viel) größer als die Dimension des physikalisch realisierbaren Zustandsraums

4.2 Besetzungszahl-Darstellung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- N identische Teilchen: nur total (anti-) symmetrische Zustände

  $\Rightarrow$ Basis $\{|i_1, \ldots, i_N\rangle\}$ (viel) größer als die Dimension des physikalisch realisierbaren Zustandsraums

$\longrightarrow$ verwende vornherein (anti-) symmetrisierte Basiszustände

4.2 Besetzungszahl-Darstellung

- N identische Teilchen: nur total (anti-) symmetrische Zustände

  $\Rightarrow$ Basis $\{|i_1, \ldots, i_N\rangle\}$ (viel) größer als die Dimension des physikalisch realisierbaren Zustandsraums

$\longrightarrow$ verwende vornherein (anti-) symmetrisierte Basiszustände

- Besetzungszahl-Darstellung: $|n_1, n_2, \ldots\rangle$
  - n_i = Anzahl der Teilchen im Einteilchen-Zustand $|i\rangle$

4.2 Besetzungszahl-Darstellung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- N identische Teilchen: nur total (anti-) symmetrische Zustände

  $\Rightarrow$ Basis $\{|i_1, \dots, i_N\rangle\}$ (viel) größer als die Dimension des physikalisch realisierbaren Zustandsraums

$\longrightarrow$ verwende vornherein (anti-) symmetrisierte Basiszustände

- Besetzungszahl-Darstellung: $|n_1, n_2, \dots\rangle$
  - n_i = Anzahl der Teilchen im Einteilchen-Zustand $|i\rangle$
  - Bosonen: $n_i \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$
  - Fermionen: $n_i \in \{0, 1\}$

4.2 Besetzungszahl-Darstellung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- N identische Teilchen: nur total (anti-) symmetrische Zustände

  $\Rightarrow$ Basis $\{|i_1, \dots, i_N\rangle\}$ (viel) größer als die Dimension des physikalisch realisierbaren Zustandsraums

$\longrightarrow$ verwende vornherein (anti-) symmetrisierte Basiszustände

- Besetzungszahl-Darstellung: $|n_1, n_2, \dots\rangle$
  - n_i = Anzahl der Teilchen im Einteilchen-Zustand $|i\rangle$
  - Bosonen: $n_i \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$
  - Fermionen: $n_i \in \{0, 1\}$
  - Vakuumzustand: $|0\rangle \equiv |0, 0, 0, \dots\rangle$

4.2 Besetzungszahl-Darstellung

- N identische Teilchen: nur total (anti-) symmetrische Zustände

  $\Rightarrow$ Basis $\{|i_1, \dots, i_N\rangle\}$ (viel) größer als die Dimension des physikalisch realisierbaren Zustandsraums

$\longrightarrow$ verwende vornherein (anti-) symmetrisierte Basiszustände

- Besetzungszahl-Darstellung: $|n_1, n_2, \dots\rangle$
  - n_i = Anzahl der Teilchen im Einteilchen-Zustand $|i\rangle$
  - Bosonen: $n_i \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$
  - Fermionen: $n_i \in \{0, 1\}$
  - Vakuumzustand: $|0\rangle \equiv |0, 0, 0, \dots\rangle$
  - Einteilchen-Zustände: $|1, 0, 0, 0, \dots\rangle$, $|0, 1, 0, 0, \dots\rangle$, ...

4.2 Besetzungszahl-Darstellung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- N identische Teilchen: nur total (anti-) symmetrische Zustände

  $\Rightarrow$ Basis $\{|i_1, \dots, i_N\rangle\}$ (viel) größer als die Dimension des physikalisch realisierbaren Zustandsraums

$\rightarrow$ verwende vornherein (anti-) symmetrisierte Basiszustände

- Besetzungszahl-Darstellung: $|n_1, n_2, \dots\rangle$
  - n_i = Anzahl der Teilchen im Einteilchen-Zustand $|i\rangle$
  - Bosonen: $n_i \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$
  - Fermionen: $n_i \in \{0, 1\}$
  - Vakuumzustand: $|0\rangle \equiv |0, 0, 0, \dots\rangle$
  - Einteilchen-Zustände: $|1, 0, 0, 0, \dots\rangle$, $|0, 1, 0, 0, \dots\rangle$, ...
  - Gesamt-Teilchenzahl: $\sum_i n_i = N$

- Beispiel: Zwei-Niveau-System (Spin-$\frac{1}{2}$-Fermionen)
  - $N = 0$: $\quad n_\uparrow = n_\downarrow = 0 \quad \rightarrow \; |0, 0\rangle \;\equiv\; |0\rangle$
  - $N = 1$: $\begin{cases} n_\uparrow = 1,\; n_\downarrow = 0 & \rightarrow \; |1, 0\rangle \;\equiv\; |\uparrow\rangle \\ n_\uparrow = 0,\; n_\downarrow = 1 & \rightarrow \; |0, 1\rangle \;\equiv\; |\downarrow\rangle \end{cases}$
  - $N = 2$: $\quad n_\uparrow = n_\downarrow = 1 \quad \rightarrow \; |1, 1\rangle \;\equiv\; \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow, \downarrow\rangle - |\downarrow, \uparrow\rangle)$
  - Es existieren keine Zustände mit $N > 2$.

- Beispiel: Zwei-Niveau-System (Spin-$\frac{1}{2}$-Fermionen)
  - $N = 0$: $\quad n_\uparrow = n_\downarrow = 0 \quad \to \quad |0,0\rangle \equiv |0\rangle$
  - $N = 1$: $\begin{cases} n_\uparrow = 1,\ n_\downarrow = 0 & \to \quad |1,0\rangle \equiv |\uparrow\rangle \\ n_\uparrow = 0,\ n_\downarrow = 1 & \to \quad |0,1\rangle \equiv |\downarrow\rangle \end{cases}$
  - $N = 2$: $\quad n_\uparrow = n_\downarrow = 1 \quad \to \quad |1,1\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow,\downarrow\rangle - |\downarrow,\uparrow\rangle)$
  - Es existieren keine Zustände mit $N > 2$.
- realistische physikalische Systeme:

  unendlich viele Zustände, aber nur endlich viele $n_i \neq 0$ ($\Rightarrow N$ endlich).

Fock-Raum

- Den von den Zuständen $|n_1, n_2, ...\rangle$ aufgespannten Raum nennt man Fock-Raum.

Fock-Raum

- Den von den Zuständen $|n_1, n_2, ...\rangle$ aufgespannten Raum nennt man Fock-Raum.
- vorläufige Vereinfachung: nur diskrete Spektren
  - z.B. endliches Volumen V mit periodischen Randbedingungen
    ➞ diskrete Impulse

    Am Ende kann man den Limes $V \to \infty$ betrachten.

Fock-Raum

- Den von den Zuständen $|n_1, n_2, ...\rangle$ aufgespannten Raum nennt man Fock-Raum.
- vorläufige Vereinfachung: nur diskrete Spektren
  - z.B. endliches Volumen V mit periodischen Randbedingungen
    ➞ diskrete Impulse

    Am Ende kann man den Limes $V \to \infty$ betrachten.
- Orthonormalitäts- und Vollständigkeitsrelationen:
  - $\langle n_1, n_2, ...|n'_1, n'_2, ...\rangle = \delta_{n_1,n'_1}\delta_{n_2,n'_2} \dots$
  - $\sum\limits_{n_1,n_2,...} |n_1, n_2, ...\rangle\langle n_1, n_2, ...| = \mathbb{1}$

Fock-Raum

- Den von den Zuständen $|n_1, n_2, ...\rangle$ aufgespannten Raum nennt man Fock-Raum.
- vorläufige Vereinfachung: nur diskrete Spektren
  - z.B. endliches Volumen V mit periodischen Randbedingungen ➞ diskrete Impulse

    Am Ende kann man den Limes $V \to \infty$ betrachten.
- Orthonormalitäts- und Vollständigkeitsrelationen:
  - $\langle n_1, n_2, ...|n_1', n_2', ...\rangle = \delta_{n_1,n_1'}\delta_{n_2,n_2'} \cdots$
  - $\sum\limits_{n_1,n_2,...} |n_1, n_2, ...\rangle\langle n_1, n_2, ...| = \mathbb{1}$

  Insbesondere sind Fockraum-Zustände mit unterschiedlicher Teilchenzahl orthogonal zu einander.

1. Bosonen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Für Bosonen gilt: $|n_1, n_2, ...\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!...}} S_+ |i_1, ... , i_N\rangle$ (vgl. Abschnitt 4.1)
  - $|i_1, ... , i_N\rangle$: beliebiger N-Teilchen-Zustand ($N = \sum n_i$)
    mit jeweils n_i Teilchen im Einteilchen-Zustand $|i\rangle$

1. Bosonen

- Für Bosonen gilt: $|n_1, n_2, ...\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! ...}} S_+ |i_1, ..., i_N\rangle$ (vgl. Abschnitt 4.1)
  - $|i_1, ..., i_N\rangle$: beliebiger N-Teilchen-Zustand ($N = \sum n_i$)
    mit jeweils n_i Teilchen im Einteilchen-Zustand $|i\rangle$
- Erzeugungsoperator: $a_i^\dagger |..., n_i, ...\rangle = \sqrt{n_i + 1}\, |..., n_i + 1, ...\rangle$
  - erhöht die Besetzungszahl des Einteilchen-Zustands $|i\rangle$ um 1

1. Bosonen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Für Bosonen gilt: $|n_1, n_2, ...\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!...}} S_+ |i_1, ..., i_N\rangle$ (vgl. Abschnitt 4.1)
  - $|i_1, ..., i_N\rangle$: beliebiger N-Teilchen-Zustand ($N = \sum n_i$)
    mit jeweils n_i Teilchen im Einteilchen-Zustand $|i\rangle$
- Erzeugungsoperator: $a_i^\dagger |..., n_i, ...\rangle = \sqrt{n_i + 1}\, |..., n_i + 1, ...\rangle$
  - erhöht die Besetzungszahl des Einteilchen-Zustands $|i\rangle$ um 1
- $\langle ... n_i' ...|a_i|... n_i ...\rangle = \langle ... n_i ...|a_i^\dagger|... n_i' ...\rangle^* = \sqrt{n_i' + 1}\, \langle ... n_i ...|... n_i' + 1 ...\rangle^*$

1. Bosonen

- Für Bosonen gilt: $|n_1, n_2, ...\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!...}} S_+ |i_1, ..., i_N\rangle$ (vgl. Abschnitt 4.1)
  - $|i_1, ..., i_N\rangle$: beliebiger N-Teilchen-Zustand ($N = \sum n_i$)
    mit jeweils n_i Teilchen im Einteilchen-Zustand $|i\rangle$
- Erzeugungsoperator: $a_i^\dagger |..., n_i, ...\rangle = \sqrt{n_i + 1}\, |..., n_i + 1, ...\rangle$
  - erhöht die Besetzungszahl des Einteilchen-Zustands $|i\rangle$ um 1
- $\langle ... n_i' ... | a_i | ... n_i ...\rangle = \langle ... n_i ... | a_i^\dagger | ... n_i' ...\rangle^* = \sqrt{n_i' + 1}\, \langle ... n_i ... | ... n_i' + 1 ...\rangle^*$

  $= \sqrt{n_i' + 1}\; ... \,\delta_{n_i, n_i'+1}\, ...$

1. Bosonen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Für Bosonen gilt: $|n_1, n_2, ...\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! ...}} S_+ |i_1, ..., i_N\rangle$ (vgl. Abschnitt 4.1)
  - $|i_1, ..., i_N\rangle$: beliebiger N-Teilchen-Zustand ($N = \sum n_i$)
    mit jeweils n_i Teilchen im Einteilchen-Zustand $|i\rangle$
- Erzeugungsoperator: $a_i^\dagger |..., n_i, ...\rangle = \sqrt{n_i + 1}\, |..., n_i + 1, ...\rangle$
  - erhöht die Besetzungszahl des Einteilchen-Zustands $|i\rangle$ um 1
- $\langle ... n_i' ... | a_i | ... n_i ...\rangle = \langle ... n_i ... | a_i^\dagger | ... n_i' ...\rangle^* = \sqrt{n_i' + 1}\, \langle ... n_i ... | ... n_i' + 1 ...\rangle^*$

$$= \sqrt{n_i' + 1}\ ...\ \delta_{n_i, n_i'+1}\ ...\ = \sqrt{n_i}\ ...\ \delta_{n_i - 1, n_i'}\ ...$$

1. Bosonen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Für Bosonen gilt: $|n_1, n_2, ...\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! ...}} S_+ |i_1, ..., i_N\rangle$ (vgl. Abschnitt 4.1)
  - $|i_1, ..., i_N\rangle$: beliebiger N-Teilchen-Zustand ($N = \sum n_i$)
    mit jeweils n_i Teilchen im Einteilchen-Zustand $|i\rangle$
- Erzeugungsoperator: $a_i^\dagger |..., n_i, ...\rangle = \sqrt{n_i + 1}\, |..., n_i + 1, ...\rangle$
  - erhöht die Besetzungszahl des Einteilchen-Zustands $|i\rangle$ um 1
- $\langle ... n_i' ... | a_i | ... n_i ... \rangle = \langle ... n_i ... | a_i^\dagger | ... n_i' ... \rangle^* = \sqrt{n_i' + 1}\, \langle ... n_i ... | ... n_i' + 1 ... \rangle^*$

$$= \sqrt{n_i' + 1}\; ... \delta_{n_i, n_i'+1} ... = \sqrt{n_i}\; ... \delta_{n_i - 1, n_i'} ... = \sqrt{n_i}\, \langle ... n_i' ... | ... n_i - 1 ... \rangle$$

1. Bosonen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Für Bosonen gilt: $|n_1, n_2, ...\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! ...}} S_+ |i_1, ..., i_N\rangle$ (vgl. Abschnitt 4.1)
  - $|i_1, ..., i_N\rangle$: beliebiger N-Teilchen-Zustand ($N = \sum n_i$)
    mit jeweils n_i Teilchen im Einteilchen-Zustand $|i\rangle$
- Erzeugungsoperator: $a_i^\dagger |..., n_i, ...\rangle = \sqrt{n_i + 1}\, |..., n_i + 1, ...\rangle$
  - erhöht die Besetzungszahl des Einteilchen-Zustands $|i\rangle$ um 1
- $\langle ... n_i' ... | a_i | ... n_i ...\rangle = \langle ... n_i ... | a_i^\dagger | ... n_i' ...\rangle^* = \sqrt{n_i' + 1}\, \langle ... n_i ... | ... n_i' + 1 ...\rangle^*$

$$= \sqrt{n_i' + 1}\; ... \delta_{n_i, n_i' + 1} ... = \sqrt{n_i}\; ... \delta_{n_i - 1, n_i'} ... = \sqrt{n_i}\, \langle ... n_i' ... | ... n_i - 1 ...\rangle$$

$\Rightarrow \quad a_i |..., n_i, ...\rangle = \sqrt{n_i}\, |..., n_i - 1, ...\rangle$

  - a_i vernichtet ein Teilchen im Zustand $|i\rangle$

1. Bosonen

- Für Bosonen gilt: $|n_1, n_2, ...\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!...}} S_+ |i_1, ..., i_N\rangle$ (vgl. Abschnitt 4.1)
  - $|i_1, ..., i_N\rangle$: beliebiger N-Teilchen-Zustand ($N = \sum n_i$)
    mit jeweils n_i Teilchen im Einteilchen-Zustand $|i\rangle$
- Erzeugungsoperator: $a_i^\dagger |..., n_i, ...\rangle = \sqrt{n_i + 1}\, |..., n_i + 1, ...\rangle$
  - erhöht die Besetzungszahl des Einteilchen-Zustands $|i\rangle$ um 1
- $\langle ... n_i' ... | a_i | ... n_i ...\rangle = \langle ... n_i ... | a_i^\dagger | ... n_i' ...\rangle^* = \sqrt{n_i' + 1}\, \langle ... n_i ... | ... n_i' + 1 ...\rangle^*$

$$= \sqrt{n_i' + 1}\ ...\ \delta_{n_i, n_i'+1}\ ...\ = \sqrt{n_i}\ ...\ \delta_{n_i - 1, n_i'}\ ...\ = \sqrt{n_i}\, \langle ... n_i' ... | ... n_i - 1 ...\rangle$$

$\Rightarrow\quad a_i |..., n_i, ...\rangle = \sqrt{n_i}\, |..., n_i - 1, ...\rangle$

  - a_i vernichtet ein Teilchen im Zustand $|i\rangle$
  - Außerdem gilt: $a_i |..., n_i = 0, ...\rangle = 0$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Erzeugungsoperator: $a_i^\dagger |\ldots, n_i, \ldots\rangle = \sqrt{n_i + 1}\, |\ldots, n_i + 1, \ldots\rangle$

  Vernichtungsungsoperator: $a_i |\ldots, n_i, \ldots\rangle = \sqrt{n_i}\, |\ldots, n_i - 1, \ldots\rangle$

- Erzeugungsoperator: $a_i^\dagger |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1}\, |\dots, n_i + 1, \dots\rangle$

  Vernichtungsungsoperator: $a_i |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i}\, |\dots, n_i - 1, \dots\rangle$

  Analoges Verhalten zu den Leiteroperatoren beim harmonischen Oszillator!

- Erzeugungsoperator: $a_i^\dagger|\ldots, n_i, \ldots\rangle = \sqrt{n_i + 1}\,|\ldots, n_i + 1, \ldots\rangle$

  Vernichtungsungsoperator: $a_i|\ldots, n_i, \ldots\rangle = \sqrt{n_i}\,|\ldots, n_i - 1, \ldots\rangle$

  Analoges Verhalten zu den Leiteroperatoren beim harmonischen Oszillator!

- $a_i^\dagger a_i|\ldots, n_i, \ldots\rangle = \sqrt{n_i}\, a_i^\dagger\,|\ldots, n_i - 1, \ldots\rangle = n_i\,|\ldots, n_i, \ldots\rangle$

- Erzeugungsoperator: $a_i^\dagger |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1}\, |\dots, n_i + 1, \dots\rangle$

  Vernichtungsungsoperator: $a_i |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i}\, |\dots, n_i - 1, \dots\rangle$

  Analoges Verhalten zu den Leiteroperatoren beim harmonischen Oszillator!

- $a_i^\dagger a_i |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i}\, a_i^\dagger |\dots, n_i - 1, \dots\rangle = n_i\, |\dots, n_i, \dots\rangle$

  $\longrightarrow$ Teilchenzahl-Operator: $\hat{n}_i \equiv a_i^\dagger a_i \quad \Rightarrow \quad \hat{n}_i |\dots, n_i, \dots\rangle = n_i |\dots, n_i, \dots\rangle$

- Erzeugungsoperator: $a_i^\dagger |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1}\, |\dots, n_i + 1, \dots\rangle$

  Vernichtungsungsoperator: $a_i |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i}\, |\dots, n_i - 1, \dots\rangle$

  Analoges Verhalten zu den Leiteroperatoren beim harmonischen Oszillator!

- $a_i^\dagger a_i |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i}\, a_i^\dagger |\dots, n_i - 1, \dots\rangle = n_i\, |\dots, n_i, \dots\rangle$

  → Teilchenzahl-Operator: $\hat{n}_i \equiv a_i^\dagger a_i \quad \Rightarrow \quad \hat{n}_i |\dots, n_i, \dots\rangle = n_i |\dots, n_i, \dots\rangle$

  → Gesamtteilchenzahl-Operator: $\hat{N} \equiv \sum_i \hat{n}_i = \sum_i a_i^\dagger a_i$

  $$\Rightarrow \quad \hat{N} |n_1, n_2, \dots\rangle = (n_1 + n_2 + \dots) |n_1, n_2, \dots\rangle = N |n_1, n_2, \dots\rangle$$

- Erzeugungsoperator: $\quad a_i^\dagger |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1}\, |\dots, n_i + 1, \dots\rangle$

  Vernichtungsungsoperator: $\quad a_i |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i}\, |\dots, n_i - 1, \dots\rangle$

  Analoges Verhalten zu den Leiteroperatoren beim harmonischen Oszillator!

- $a_i^\dagger a_i |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i}\, a_i^\dagger |\dots, n_i - 1, \dots\rangle = n_i\, |\dots, n_i, \dots\rangle$

  → Teilchenzahl-Operator: $\quad \hat{n}_i \equiv a_i^\dagger a_i \quad \Rightarrow \quad \hat{n}_i |\dots, n_i, \dots\rangle = n_i |\dots, n_i, \dots\rangle$

  → Gesamtteilchenzahl-Operator: $\quad \hat{N} \equiv \sum_i \hat{n}_i = \sum_i a_i^\dagger a_i$

  $$\Rightarrow \quad \hat{N} |n_1, n_2, \dots\rangle = (n_1 + n_2 + \dots) |n_1, n_2, \dots\rangle = N |n_1, n_2, \dots\rangle$$

- $a_i a_i^\dagger |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1}\, a_i |\dots, n_i + 1, \dots\rangle = (n_i + 1)\, |\dots, n_i, \dots\rangle$

- Erzeugungsoperator: $a_i^\dagger |\ldots, n_i, \ldots\rangle = \sqrt{n_i + 1}\, |\ldots, n_i + 1, \ldots\rangle$
  Vernichtungsungsoperator: $a_i |\ldots, n_i, \ldots\rangle = \sqrt{n_i}\, |\ldots, n_i - 1, \ldots\rangle$

  Analoges Verhalten zu den Leiteroperatoren beim harmonischen Oszillator!

- $a_i^\dagger a_i |\ldots, n_i, \ldots\rangle = \sqrt{n_i}\, a_i^\dagger |\ldots, n_i - 1, \ldots\rangle = n_i\, |\ldots, n_i, \ldots\rangle$

  ➞ Teilchenzahl-Operator: $\hat{n}_i \equiv a_i^\dagger a_i \quad \Rightarrow \quad \hat{n}_i |\ldots, n_i, \ldots\rangle = n_i |\ldots, n_i, \ldots\rangle$

  ➞ Gesamtteilchenzahl-Operator: $\hat{N} \equiv \sum_i \hat{n}_i = \sum_i a_i^\dagger a_i$

  $$\Rightarrow \quad \hat{N} |n_1, n_2, \ldots\rangle = (n_1 + n_2 + \ldots) |n_1, n_2, \ldots\rangle = N |n_1, n_2, \ldots\rangle$$

- $a_i a_i^\dagger |\ldots, n_i, \ldots\rangle = \sqrt{n_i + 1}\, a_i |\ldots, n_i + 1, \ldots\rangle = (n_i + 1)\, |\ldots, n_i, \ldots\rangle$

  $$\Rightarrow \quad \left[a_i, a_i^\dagger\right] |\ldots, n_i, \ldots\rangle = |\ldots, n_i, \ldots\rangle$$

- Erzeugungsoperator: $a_i^\dagger |\ldots, n_i, \ldots\rangle = \sqrt{n_i + 1}\, |\ldots, n_i + 1, \ldots\rangle$

  Vernichtungsungsoperator: $a_i |\ldots, n_i, \ldots\rangle = \sqrt{n_i}\, |\ldots, n_i - 1, \ldots\rangle$

  Analoges Verhalten zu den Leiteroperatoren beim harmonischen Oszillator!

- $a_i^\dagger a_i |\ldots, n_i, \ldots\rangle = \sqrt{n_i}\, a_i^\dagger |\ldots, n_i - 1, \ldots\rangle = n_i\, |\ldots, n_i, \ldots\rangle$

  → Teilchenzahl-Operator: $\hat{n}_i \equiv a_i^\dagger a_i \quad \Rightarrow \quad \hat{n}_i |\ldots, n_i, \ldots\rangle = n_i |\ldots, n_i, \ldots\rangle$

  → Gesamtteilchenzahl-Operator: $\hat{N} \equiv \sum_i \hat{n}_i = \sum_i a_i^\dagger a_i$

  $$\Rightarrow \quad \hat{N}|n_1, n_2, \ldots\rangle = (n_1 + n_2 + \ldots)|n_1, n_2, \ldots\rangle = N|n_1, n_2, \ldots\rangle$$

- $a_i a_i^\dagger |\ldots, n_i, \ldots\rangle = \sqrt{n_i + 1}\, a_i |\ldots, n_i + 1, \ldots\rangle = (n_i + 1)\, |\ldots, n_i, \ldots\rangle$

  $$\Rightarrow \quad \left[a_i, a_i^\dagger\right] |\ldots, n_i, \ldots\rangle = |\ldots, n_i, \ldots\rangle \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left[a_i, a_i^\dagger\right] = 1}$$

- $a_i^\dagger |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1}\,|\dots, n_i + 1, \dots\rangle, \qquad a_i|\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i}\,|\dots, n_i - 1, \dots\rangle$

$$\Rightarrow \; a_i a_j^\dagger |\dots, n_i, \dots n_j, \dots\rangle \overset{i \neq j}{=} \sqrt{n_i(n_j + 1)}\,|\dots, n_i - 1, \dots n_j + 1, \dots\rangle$$

$$= a_j^\dagger a_i |\dots, n_i, \dots n_j, \dots\rangle$$

- $a_i^\dagger |\ldots, n_i, \ldots\rangle = \sqrt{n_i + 1}\,|\ldots, n_i + 1, \ldots\rangle, \qquad a_i|\ldots, n_i, \ldots\rangle = \sqrt{n_i}\,|\ldots, n_i - 1, \ldots\rangle$

  $$\Rightarrow \; a_i a_j^\dagger |\ldots, n_i, \ldots n_j, \ldots\rangle \overset{i \neq j}{=} \sqrt{n_i(n_j + 1)}\,|\ldots, n_i - 1, \ldots n_j + 1, \ldots\rangle$$

  $$= a_j^\dagger a_i |\ldots, n_i, \ldots n_j, \ldots\rangle$$

- Analog spielt bei $a_i a_j$ oder $a_i^\dagger a_j^\dagger$ die Reihenfolge keine Rolle.

- $a_i^\dagger |\ldots, n_i, \ldots\rangle = \sqrt{n_i + 1}\, |\ldots, n_i + 1, \ldots\rangle, \qquad a_i |\ldots, n_i, \ldots\rangle = \sqrt{n_i}\, |\ldots, n_i - 1, \ldots\rangle$

  $$\Rightarrow \; a_i a_j^\dagger |\ldots, n_i, \ldots n_j, \ldots\rangle \overset{i \neq j}{=} \sqrt{n_i(n_j + 1)}\, |\ldots, n_i - 1, \ldots n_j + 1, \ldots\rangle$$

  $$= a_j^\dagger a_i |\ldots, n_i, \ldots n_j, \ldots\rangle$$

- Analog spielt bei $a_i a_j$ oder $a_i^\dagger a_j^\dagger$ die Reihenfolge keine Rolle.

→ Bose-Vertauschungsrelationen: $\boxed{\left[a_i, a_j\right] = \left[a_i^\dagger, a_j^\dagger\right] = 0, \quad \left[a_i, a_j^\dagger\right] = \delta_{ij}}$

- $a_i^\dagger \left|\ldots, n_i, \ldots\right\rangle = \sqrt{n_i+1}\left|\ldots, n_i+1, \ldots\right\rangle, \qquad a_i\left|\ldots, n_i, \ldots\right\rangle = \sqrt{n_i}\left|\ldots, n_i-1, \ldots\right\rangle$

$$\Rightarrow \quad a_i a_j^\dagger \left|\ldots, n_i, \ldots n_j, \ldots\right\rangle \stackrel{i \neq j}{=} \sqrt{n_i(n_j+1)}\left|\ldots, n_i-1, \ldots n_j+1, \ldots\right\rangle$$

$$= a_j^\dagger a_i \left|\ldots, n_i, \ldots n_j, \ldots\right\rangle$$

- Analog spielt bei $a_i a_j$ oder $a_i^\dagger a_j^\dagger$ die Reihenfolge keine Rolle.

→ Bose-Vertauschungsrelationen: $\boxed{\left[a_i, a_j\right] = \left[a_i^\dagger, a_j^\dagger\right] = 0, \quad \left[a_i, a_j^\dagger\right] = \delta_{ij}}$

- Erzeugung beliebiger N-Teilchen-Zustände aus dem Vakuum:

$$\left|n_1, n_2, \ldots\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!\ldots}}\left(a_1^\dagger\right)^{n_1}\left(a_2^\dagger\right)^{n_2}\ldots\left|0\right\rangle$$

2. Fermionen

- Antisymmetrisierte N-Fermion-Zustände (Slater-Determinante):

$$S_-|i_1,\dots,i_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{P\in S_N}(-1)^P\,P|i_1,\dots,i_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}\begin{vmatrix} |i_1\rangle_1 & \dots & |i_1\rangle_N \\ \vdots & & \vdots \\ |i_N\rangle_1 & \dots & |i_N\rangle_N \end{vmatrix}$$

2. Fermionen

- Antisymmetrisierte N-Fermion-Zustände (Slater-Determinante):

$$S_-|i_1,\dots,i_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{P\in S_N}(-1)^P\,P|i_1,\dots,i_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}\begin{vmatrix} |i_1\rangle_1 & \dots & |i_1\rangle_N \\ \vdots & & \vdots \\ |i_N\rangle_1 & \dots & |i_N\rangle_N \end{vmatrix}$$

- Es kommt auf die Reihenfolge der Teilchen an:

$$S_-P|i_1,\dots,i_N\rangle = (-1)^P S_-|i_1,\dots,i_N\rangle,$$

$$\text{z.B.}\quad S_-P_{ij}|i_1,\dots,i_N\rangle = -S_-|i_1,\dots,i_N\rangle$$

2. Fermionen

- Antisymmetrisierte N-Fermion-Zustände (Slater-Determinante):

$$S_-|i_1,\dots,i_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{P\in S_N}(-1)^P\,P|i_1,\dots,i_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}\begin{vmatrix} |i_1\rangle_1 & \dots & |i_1\rangle_N \\ \vdots & & \vdots \\ |i_N\rangle_1 & \dots & |i_N\rangle_N \end{vmatrix}$$

- Es kommt auf die Reihenfolge der Teilchen an:

$$S_-P|i_1,\dots,i_N\rangle = (-1)^P S_-|i_1,\dots,i_N\rangle,$$

$$\text{z.B.}\quad S_-P_{ij}|i_1,\dots,i_N\rangle = -S_-|i_1,\dots,i_N\rangle$$

- Definiere Erzeugungsoperatoren über:

$$S_-|i_1,\dots,i_N\rangle = a^\dagger_{i_N}\dots a^\dagger_{i_1}|0\rangle \qquad \text{in dieser Reihenfolge!}$$

  - Erzeuge zuerst Teilchen 1 im Zustand $|i_1\rangle$ und zuletzt Teilchen N im Zustand $|i_N\rangle$.
  - Konvention: Manche Autoren machen es anders herum!

- $S_-|i_1, \ldots, i_N\rangle = a^\dagger_{i_N} \ldots a^\dagger_{i_1}|0\rangle$

- $S_- |i_1, \dots, i_N\rangle = a^\dagger_{i_N} \dots a^\dagger_{i_1} |0\rangle \quad \Rightarrow \quad a^\dagger_i a^\dagger_j = -a^\dagger_j a^\dagger_i$

  z.B. $\quad a^\dagger_i a^\dagger_j |0\rangle = S_- |j, i\rangle = -S_- |i, j\rangle = -a^\dagger_j a^\dagger_i |0\rangle$

- $S_- |i_1, \ldots, i_N\rangle = a^\dagger_{i_N} \ldots a^\dagger_{i_1} |0\rangle \quad \Rightarrow \quad a^\dagger_i a^\dagger_j = -a^\dagger_j a^\dagger_i$

  z.B. $\quad a^\dagger_i a^\dagger_j |0\rangle = S_- |j, i\rangle = -S_- |i, j\rangle = -a^\dagger_j a^\dagger_i |0\rangle$

  $\Rightarrow \quad \left(a^\dagger_i\right)^2 = 0$ (Pauli-Prinzip)

- $S_- |i_1, \dots, i_N\rangle = a^\dagger_{i_N} \dots a^\dagger_{i_1} |0\rangle \quad \Rightarrow \quad a^\dagger_i a^\dagger_j = -a^\dagger_j a^\dagger_i$

  z.B. $\quad a^\dagger_i a^\dagger_j |0\rangle = S_- |j, i\rangle = -S_- |i, j\rangle = -a^\dagger_j a^\dagger_i |0\rangle$

  $\Rightarrow \quad \left(a^\dagger_i\right)^2 = 0$ (Pauli-Prinzip)

- Besetzungszahldarstellung:

  $|n_1, n_2, \dots\rangle = \dots \left(a^\dagger_2\right)^{n_2} \left(a^\dagger_1\right)^{n_1} |0\rangle$ (in dieser Reihenfolge)

- $S_- |i_1, \ldots, i_N\rangle = a^\dagger_{i_N} \ldots a^\dagger_{i_1} |0\rangle \quad \Rightarrow \quad a^\dagger_i a^\dagger_j = -a^\dagger_j a^\dagger_i$

  z.B. $\quad a^\dagger_i a^\dagger_j |0\rangle = S_- |j, i\rangle = -S_- |i, j\rangle = -a^\dagger_j a^\dagger_i |0\rangle$

  $\Rightarrow \quad \left(a^\dagger_i\right)^2 = 0$ (Pauli-Prinzip)

- Besetzungszahldarstellung:

  $|n_1, n_2, \ldots\rangle = \ldots \left(a^\dagger_2\right)^{n_2} \left(a^\dagger_1\right)^{n_1} |0\rangle$ (in dieser Reihenfolge)

- Beispiel:

  $|1, 1, 0, 0, \ldots\rangle = a^\dagger_2 a^\dagger_1 |0\rangle = S_- |1, 2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1, 2\rangle - |2, 1\rangle\right)$

- $\left|n_1, n_2, ...\right\rangle = ... \left(a_2^\dagger\right)^{n_2} \left(a_1^\dagger\right)^{n_1} |0\rangle$

- $|n_1, n_2, ...\rangle = ... \left(a_2^\dagger\right)^{n_2} \left(a_1^\dagger\right)^{n_1} |0\rangle$
- Wirkung von $a_i^\dagger$ auf einen N-Teilchen-Zustand:

$$\Rightarrow \quad a_i^\dagger |\dots, n_i, \dots\rangle = (-1)^{\sum\limits_{j>i} n_j} (1 - n_i) |\dots, n_i + 1, \dots\rangle$$

  - $\sum\limits_{j>i} n_j$ = Zahl der Transpositionen, um $a_i^\dagger$ an die „richtige" Stelle zu bringen
  - $(1 - n_i) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n_i = 0, \text{ d.h. } |i\rangle \text{ ursprünglich unbesetzt} \\ 0, & \text{falls } n_i = 1, \text{ d.h. } |i\rangle \text{ besetzt} \end{cases}$

- $|n_1, n_2, ...\rangle = ... \left(a_2^\dagger\right)^{n_2} \left(a_1^\dagger\right)^{n_1} |0\rangle$
- Wirkung von $a_i^\dagger$ auf einen N-Teilchen-Zustand:

$$\Rightarrow \quad a_i^\dagger |... , n_i, ...\rangle = (-1)^{\sum\limits_{j>i} n_j} (1 - n_i) |... , n_i + 1, ...\rangle$$

  - $\sum\limits_{j>i} n_j$ = Zahl der Transpositionen, um $a_i^\dagger$ an die „richtige" Stelle zu bringen
  - $(1 - n_i) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n_i = 0, \text{ d.h. } |i\rangle \text{ ursprünglich unbesetzt} \\ 0, & \text{falls } n_i = 1, \text{ d.h. } |i\rangle \text{ besetzt} \end{cases}$
- Wirkung von a_i auf einen N-Teilchen-Zustand:

Analog zum Boson-Fall: $\langle ... n_i' ... | a_i | ... n_i ... \rangle = \langle ... n_i ... | a_i^\dagger | ... n_i' ... \rangle^* = ...$

$$\rightarrow \quad a_i |... , n_i, ...\rangle = (-1)^{\sum\limits_{j>i} n_j} n_i |... , n_i - 1, ...\rangle$$

- $|n_1, n_2, ...\rangle = ... \left(a_2^\dagger\right)^{n_2} \left(a_1^\dagger\right)^{n_1} |0\rangle$
- Wirkung von $a_i^\dagger$ auf einen N-Teilchen-Zustand:

$$\Rightarrow \; a_i^\dagger |..., n_i, ...\rangle = (-1)^{\sum\limits_{j>i} n_j} (1 - n_i) |..., n_i + 1, ...\rangle$$

  - $\sum\limits_{j>i} n_j$ = Zahl der Transpositionen, um $a_i^\dagger$ an die „richtige” Stelle zu bringen
  - $(1 - n_i) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n_i = 0 \text{, d.h. } |i\rangle \text{ ursprünglich unbesetzt} \\ 0, & \text{falls } n_i = 1 \text{, d.h. } |i\rangle \text{ besetzt} \end{cases}$
- Wirkung von a_i auf einen N-Teilchen-Zustand:

Analog zum Boson-Fall: $\langle ... n_i' ... | a_i | ... n_i ... \rangle = \langle ... n_i ... | a_i^\dagger | ... n_i' ... \rangle^* = ...$

$$\rightarrow \; a_i |..., n_i, ...\rangle = (-1)^{\sum\limits_{j>i} n_j} n_i |..., n_i - 1, ...\rangle \qquad \Rightarrow \; a_i |..., n_i = 0, ...\rangle = 0$$

- $a_i^\dagger \big| \ldots, n_i, \ldots \big\rangle = (-1)^{\sum_{j>i} n_j} (1 - n_i) \big| \ldots, n_i + 1, \ldots \big\rangle$

  $a_i \big| \ldots, n_i, \ldots \big\rangle = (-1)^{\sum_{j>i} n_j} n_i \big| \ldots, n_i - 1, \ldots \big\rangle$

- $a_i^\dagger |\ldots, n_i, \ldots\rangle = (-1)^{\sum\limits_{j>i} n_j} (1 - n_i) |\ldots, n_i + 1, \ldots\rangle$

  $a_i |\ldots, n_i, \ldots\rangle = (-1)^{\sum\limits_{j>i} n_j} n_i |\ldots, n_i - 1, \ldots\rangle$

$\Rightarrow \; a_i^\dagger a_i |\ldots, n_i, \ldots\rangle = \big(1 - (n_i - 1)\big) n_i |\ldots, n_i, \ldots\rangle \overset{n_i \in \{0,1\}}{=} n_i |\ldots, n_i, \ldots\rangle$

- $a_i^\dagger |\ldots, n_i, \ldots\rangle = (-1)^{\sum\limits_{j>i} n_j} (1 - n_i) |\ldots, n_i + 1, \ldots\rangle$

  $a_i |\ldots, n_i, \ldots\rangle = (-1)^{\sum\limits_{j>i} n_j} n_i |\ldots, n_i - 1, \ldots\rangle$

$\Rightarrow \quad a_i^\dagger a_i |\ldots, n_i, \ldots\rangle = \big(1 - (n_i - 1)\big) n_i |\ldots, n_i, \ldots\rangle \overset{n_i \in \{0,1\}}{=} n_i |\ldots, n_i, \ldots\rangle$

$\longrightarrow$ Teilchenzahl-Operator: $\quad \hat{n}_i \equiv a_i^\dagger a_i \quad$ (wie für Bosonen)

- $a_i^\dagger |\ldots, n_i, \ldots\rangle = (-1)^{\sum\limits_{j>i} n_j} (1 - n_i) |\ldots, n_i + 1, \ldots\rangle$

  $a_i |\ldots, n_i, \ldots\rangle = (-1)^{\sum\limits_{j>i} n_j} n_i |\ldots, n_i - 1, \ldots\rangle$

$\Rightarrow$ $a_i^\dagger a_i |\ldots, n_i, \ldots\rangle = \big(1 - (n_i - 1)\big) n_i |\ldots, n_i, \ldots\rangle \overset{n_i \in \{0,1\}}{=} n_i |\ldots, n_i, \ldots\rangle$

  → Teilchenzahl-Operator: $\hat{n}_i \equiv a_i^\dagger a_i$ (wie für Bosonen)

- $a_i a_i^\dagger |\ldots, n_i, \ldots\rangle = (n_i + 1)(1 - n_i) |\ldots, n_i, \ldots\rangle \overset{n_i \in \{0,1\}}{=} (1 - n_i) |\ldots, n_i, \ldots\rangle$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $a_i^\dagger |\dots, n_i, \dots\rangle = (-1)^{\sum_{j>i} n_j} (1 - n_i) |\dots, n_i + 1, \dots\rangle$

  $a_i |\dots, n_i, \dots\rangle = (-1)^{\sum_{j>i} n_j} n_i |\dots, n_i - 1, \dots\rangle$

$\Rightarrow$ $a_i^\dagger a_i |\dots, n_i, \dots\rangle = \big(1 - (n_i - 1)\big) n_i |\dots, n_i, \dots\rangle \overset{n_i \in \{0,1\}}{=} n_i |\dots, n_i, \dots\rangle$

→ Teilchenzahl-Operator: $\hat{n}_i \equiv a_i^\dagger a_i$ (wie für Bosonen)

- $a_i a_i^\dagger |\dots, n_i, \dots\rangle = (n_i + 1)(1 - n_i) |\dots, n_i, \dots\rangle \overset{n_i \in \{0,1\}}{=} (1 - n_i) |\dots, n_i, \dots\rangle$

$\Rightarrow$ $\{a_i, a_i^\dagger\} = a_i a_i^\dagger + a_i^\dagger a_i = 1$

- $a_i^\dagger \big|\ldots, n_i, \ldots\big\rangle = (-1)^{\sum_{j>i} n_j} (1-n_i) \big|\ldots, n_i+1, \ldots\big\rangle$

  $a_i \big|\ldots, n_i, \ldots\big\rangle = (-1)^{\sum_{j>i} n_j} n_i \big|\ldots, n_i-1, \ldots\big\rangle$

$\Rightarrow$ $a_i^\dagger a_i \big|\ldots, n_i, \ldots\big\rangle = \big(1-(n_i-1)\big) n_i \big|\ldots, n_i, \ldots\big\rangle \overset{n_i \in \{0,1\}}{=} n_i \big|\ldots, n_i, \ldots\big\rangle$

  ➞ Teilchenzahl-Operator: $\hat{n}_i \equiv a_i^\dagger a_i$ (wie für Bosonen)

- $a_i a_i^\dagger \big|\ldots, n_i, \ldots\big\rangle = (n_i+1)(1-n_i) \big|\ldots, n_i, \ldots\big\rangle \overset{n_i \in \{0,1\}}{=} (1-n_i) \big|\ldots, n_i, \ldots\big\rangle$

$\Rightarrow$ $\{a_i, a_i^\dagger\} = a_i a_i^\dagger + a_i^\dagger a_i = 1$

➞ Fermi-Vertauschungsrelationen: $\boxed{\{a_i, a_j\} = \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0, \quad \{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij}}$