3.5 Darstellungsunabhängiger Zugang zur Streutheorie

3.5 Darstellungsunabhängiger Zugang zur Streutheorie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Hamilton-Operator: $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$
  - freier Anteil: $\hat{H}_0 = \hat{H}_0(\hat{\vec{p}}) = \frac{\hat{\vec{p}}^{\,2}}{2\mu}, \quad \hat{\vec{p}} = \hbar\hat{\vec{k}}$
  - Potenzial: $\hat{V} = \hat{V}(\hat{\vec{r}})$ (in der Regel)

3.5 Darstellungsunabhängiger Zugang zur Streutheorie

- Hamilton-Operator: $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$
  - freier Anteil: $\hat{H}_0 = \hat{H}_0(\hat{\vec{p}}) = \frac{\hat{\vec{p}}^{\,2}}{2\mu}, \quad \hat{\vec{p}} = \hbar\hat{\vec{k}}$
  - Potenzial: $\hat{V} = \hat{V}(\hat{\vec{r}})$ (in der Regel)
- Eigenzustände zur Energie E:
  - $\hat{H}\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle$
  - $\hat{H}_0\,|\phi\rangle = E\,|\phi\rangle$

3.5 Darstellungsunabhängiger Zugang zur Streutheorie

- Hamilton-Operator: $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$
  - freier Anteil: $\hat{H}_0 = \hat{H}_0(\hat{\vec{p}}) = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2\mu}$, $\quad \hat{\vec{p}} = \hbar\hat{\vec{k}}$
  - Potenzial: $\hat{V} = \hat{V}(\hat{\vec{r}})$ (in der Regel)
- Eigenzustände zur Energie E:
  - $\hat{H}\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle$
  - $\hat{H}_0\,|\phi\rangle = E\,|\phi\rangle$
- Impulseigenzustände: $\hat{\vec{k}}\,|\vec{k}\rangle = \vec{k}\,|\vec{k}\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{\vec{p}}\,|\vec{k}\rangle = \hbar\vec{k}\,|\vec{k}\rangle$

3.5 Darstellungsunabhängiger Zugang zur Streutheorie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Hamilton-Operator: $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$
  - freier Anteil: $\hat{H}_0 = \hat{H}_0(\hat{\vec{p}}) = \frac{\hat{\vec{p}}^{\,2}}{2\mu}, \quad \hat{\vec{p}} = \hbar\hat{\vec{k}}$
  - Potenzial: $\hat{V} = \hat{V}(\hat{\vec{r}})$ (in der Regel)
- Eigenzustände zur Energie E:
  - $\hat{H}\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle$
  - $\hat{H}_0\,|\phi\rangle = E\,|\phi\rangle$
- Impulseigenzustände: $\hat{\vec{k}}\,|\vec{k}\rangle = \vec{k}\,|\vec{k}\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{\vec{p}}\,|\vec{k}\rangle = \hbar\vec{k}\,|\vec{k}\rangle$

$$\Rightarrow \quad \hat{H}_0\,|\vec{k}\rangle = \frac{\hat{\vec{p}}^{\,2}}{2\mu}\,|\vec{k}\rangle = \frac{\hbar^2\vec{k}^{\,2}}{2\mu}\,|\vec{k}\rangle = E\,|\vec{k}\rangle \quad \text{mit} \quad E = \frac{\hbar^2\vec{k}^{\,2}}{2\mu}$$

3.5 Darstellungsunabhängiger Zugang zur Streutheorie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Hamilton-Operator: $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$
  - freier Anteil: $\hat{H}_0 = \hat{H}_0(\hat{\vec{p}}) = \frac{\hat{\vec{p}}^{\,2}}{2\mu}, \quad \hat{\vec{p}} = \hbar\hat{\vec{k}}$
  - Potenzial: $\hat{V} = \hat{V}(\hat{\vec{r}})$ (in der Regel)
- Eigenzustände zur Energie E:
  - $\hat{H}\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle$
  - $\hat{H}_0\,|\phi\rangle = E\,|\phi\rangle$
- Impulseigenzustände: $\hat{\vec{k}}\,|\vec{k}\rangle = \vec{k}\,|\vec{k}\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{\vec{p}}\,|\vec{k}\rangle = \hbar\vec{k}\,|\vec{k}\rangle$

$$\Rightarrow \quad \hat{H}_0\,|\vec{k}\rangle = \frac{\hat{\vec{p}}^{\,2}}{2\mu}\,|\vec{k}\rangle = \frac{\hbar^2\vec{k}^{\,2}}{2\mu}\,|\vec{k}\rangle = E\,|\vec{k}\rangle \quad \text{mit} \quad E = \frac{\hbar^2\vec{k}^{\,2}}{2\mu} \qquad \text{d.h.} \quad |\vec{k}\rangle \in \{|\phi\rangle\}$$

- Eigenwertgleichung (Schrödinger-Gl.): $\hat{H}\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle$

- Eigenwertgleichung (Schrödinger-Gl.): $\hat{H}\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle$

$$\Rightarrow \quad \left(E - \hat{H}\right)|\psi\rangle = \left(E - \hat{H}_0 - \hat{V}\right)|\psi\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(E - \hat{H}_0\right)|\psi\rangle = \hat{V}\,|\psi\rangle$$

- Eigenwertgleichung (Schrödinger-Gl.): $\hat{H}\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle$

$$\Rightarrow \quad \left(E - \hat{H}\right)|\psi\rangle = \left(E - \hat{H}_0 - \hat{V}\right)|\psi\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(E - \hat{H}_0\right)|\psi\rangle = \hat{V}\,|\psi\rangle$$

- formale Lösung:

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle + \left(E - \hat{H}_0\right)^{-1}\hat{V}\,|\psi\rangle$$

- Eigenwertgleichung (Schrödinger-Gl.): $\hat{H}\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle$

$$\Rightarrow \quad \left(E - \hat{H}\right)|\psi\rangle = \left(E - \hat{H}_0 - \hat{V}\right)|\psi\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(E - \hat{H}_0\right)|\psi\rangle = \hat{V}\,|\psi\rangle$$

- formale Lösung:

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle + \left(E - \hat{H}_0\right)^{-1}\hat{V}\,|\psi\rangle \;= |\phi\rangle + \hat{G}_0(E)\,\hat{V}\,|\psi\rangle$$

mit $\hat{G}_0(z) = \left(z - \hat{H}_0\right)^{-1}, \quad z \in \mathbb{C},$ „Green'scher Operator", „Resolvente"

- Eigenwertgleichung (Schrödinger-Gl.): $\hat{H}\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle$

$$\Rightarrow \quad \left(E - \hat{H}\right)|\psi\rangle = \left(E - \hat{H}_0 - \hat{V}\right)|\psi\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(E - \hat{H}_0\right)|\psi\rangle = \hat{V}\,|\psi\rangle$$

- formale Lösung:

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle + \left(E - \hat{H}_0\right)^{-1}\hat{V}\,|\psi\rangle \; = |\phi\rangle + \hat{G}_0(E)\,\hat{V}\,|\psi\rangle$$

mit $\hat{G}_0(z) = \left(z - \hat{H}_0\right)^{-1}$, $\quad z \in \mathbb{C}$, „Green'scher Operator", „Resolvente"

- $\hat{G}_0^{-1}(E)\,|\phi\rangle = \left(E - \hat{H}_0\right)|\phi\rangle = 0$

- Eigenwertgleichung (Schrödinger-Gl.): $\hat{H}\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle$

  $\Rightarrow \quad \left(E - \hat{H}\right)|\psi\rangle = \left(E - \hat{H}_0 - \hat{V}\right)|\psi\rangle = 0$

  $\Rightarrow \quad \left(E - \hat{H}_0\right)|\psi\rangle = \hat{V}\,|\psi\rangle$

- formale Lösung:

  $$|\psi\rangle = |\phi\rangle + \left(E - \hat{H}_0\right)^{-1}\hat{V}\,|\psi\rangle \;= |\phi\rangle + \hat{G}_0(E)\,\hat{V}\,|\psi\rangle$$

  mit $\hat{G}_0(z) = \left(z - \hat{H}_0\right)^{-1}, \quad z \in \mathbb{C},$ „Green'scher Operator", „Resolvente"

- $\hat{G}_0^{-1}(E)\,|\phi\rangle = \left(E - \hat{H}_0\right)|\phi\rangle = 0$

  $\Rightarrow \quad |\phi\rangle = \hat{G}_0(E)\,\hat{G}_0^{-1}(E)\,|\phi\rangle = \hat{G}_0(E)\,0 \quad \Rightarrow$ $\hat{G}_0(z)$ ist für $z = E$ singulär

  $\longrightarrow$ Ausweichen in die komplexe Ebene

- Randbedingung:

  einlaufende ebene Welle, auslaufende Streuwelle (wie zuvor)

- Randbedingung:

  einlaufende ebene Welle, auslaufende Streuwelle (wie zuvor)

  $$\rightarrow \boxed{|\psi_{\vec{k}}\rangle = |\vec{k}\rangle + \hat{G}_0(E + i\varepsilon)\, \hat{V}\, |\psi_{\vec{k}}\rangle}$$

  Lippmann-Schwinger-Gleichung für den Zustand $|\psi\rangle$

Orts- und Impulsraumdarstellung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Eigenzustände von Orts- und Impulsoperator:

$$\hat{\vec{r}}\,|\vec{r}\rangle = \vec{r}|\vec{r}\rangle\;, \qquad \hat{\vec{k}}\,|\vec{k}\rangle = \vec{k}|\vec{k}\rangle$$

Orts- und Impulsraumdarstellung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Eigenzustände von Orts- und Impulsoperator:

$$\hat{\vec{r}}\,|\vec{r}\rangle = \vec{r}|\vec{r}\rangle\,, \qquad \hat{\vec{k}}\,|\vec{k}\rangle = \vec{k}|\vec{k}\rangle$$

- Orthonormierungs- und Vollständigkeitsrelationen:

$$\langle\vec{r}\,'|\vec{r}\rangle = \delta^3(\vec{r}\,' - \vec{r})\,, \qquad \int d^3r\,|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}| = \mathbb{1}$$

$$\langle\vec{k}\,'|\vec{k}\rangle = (2\pi)^3\,\delta^3(\vec{k}\,' - \vec{k})\,, \qquad \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,|\vec{k}\rangle\langle\vec{k}| = \mathbb{1}$$

Orts- und Impulsraumdarstellung

- Eigenzustände von Orts- und Impulsoperator:

$$\hat{\vec{r}}\,|\vec{r}\rangle = \vec{r}|\vec{r}\rangle\,, \qquad \hat{\vec{k}}\,|\vec{k}\rangle = \vec{k}|\vec{k}\rangle$$

- Orthonormierungs- und Vollständigkeitsrelationen:

$$\langle\vec{r}\,'|\vec{r}\rangle = \delta^3(\vec{r}\,' - \vec{r})\,, \qquad \int d^3r\,|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}| = \mathbb{1}$$

$$\langle\vec{k}\,'|\vec{k}\rangle = (2\pi)^3\,\delta^3(\vec{k}\,' - \vec{k})\,, \qquad \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,|\vec{k}\rangle\langle\vec{k}| = \mathbb{1}$$

(Achtung: Manche Autoren verwenden andere Normierungskonventionen!)

Orts- und Impulsraumdarstellung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Eigenzustände von Orts- und Impulsoperator:

$$\hat{\vec{r}}\,|\vec{r}\rangle = \vec{r}|\vec{r}\rangle\,, \qquad \hat{\vec{k}}\,|\vec{k}\rangle = \vec{k}|\vec{k}\rangle$$

- Orthonormierungs- und Vollständigkeitsrelationen:

$$\langle\vec{r}\,'|\vec{r}\rangle = \delta^3(\vec{r}\,' - \vec{r})\,, \qquad \int d^3r\,|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}| = \mathbb{1}$$

$$\langle\vec{k}\,'|\vec{k}\rangle = (2\pi)^3\,\delta^3(\vec{k}\,' - \vec{k})\,, \qquad \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,|\vec{k}\rangle\langle\vec{k}| = \mathbb{1}$$

(Achtung: Manche Autoren verwenden andere Normierungskonventionen!)

Konsistenz:

$$|\vec{r}\,'\rangle = \int d^3r\,|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|\vec{r}\,'\rangle = \int d^3r\,|\vec{r}\rangle\,\delta^3(\vec{r}\,' - \vec{r}) \qquad \checkmark$$

$$|\vec{k}\,'\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,|\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|\vec{k}\,'\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,|\vec{k}\rangle(2\pi)^3\,\delta^3(\vec{k}\,' - \vec{k}) \qquad \checkmark$$

- Wellenfunktionen
  - Ortsraumdarstellung: $\psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi \rangle$
  - Impulsraumdarstellung: $\tilde{\psi}(\vec{k}) = \langle \vec{k} | \psi \rangle$

- Wellenfunktionen
  - Ortsraumdarstellung: $\psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi \rangle$
  - Impulsraumdarstellung: $\tilde{\psi}(\vec{k}) = \langle \vec{k} | \psi \rangle$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\psi}(\vec{k}) = \langle \vec{k} | \psi \rangle = \int d^3r \, \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \psi \rangle = \int d^3r \, \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle \, \psi(\vec{r})$$

- Wellenfunktionen
  - Ortsraumdarstellung: $\psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi \rangle$
  - Impulsraumdarstellung: $\tilde{\psi}(\vec{k}) = \langle \vec{k} | \psi \rangle$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\psi}(\vec{k}) = \langle \vec{k} | \psi \rangle = \int d^3r \, \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \psi \rangle = \int d^3r \, \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle \, \psi(\vec{r}) \quad \stackrel{!}{=} \int d^3r \, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \, \psi(\vec{r})$$

- Wellenfunktionen
  - Ortsraumdarstellung: $\psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi \rangle$
  - Impulsraumdarstellung: $\tilde{\psi}(\vec{k}) = \langle \vec{k} | \psi \rangle$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\psi}(\vec{k}) = \langle \vec{k} | \psi \rangle = \int d^3r \, \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \psi \rangle = \int d^3r \, \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle \, \psi(\vec{r}) \quad \stackrel{!}{=} \int d^3r \, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \, \psi(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \quad \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

- Wellenfunktionen
  - Ortsraumdarstellung: $\psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi \rangle$
  - Impulsraumdarstellung: $\tilde{\psi}(\vec{k}) = \langle \vec{k} | \psi \rangle$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\psi}(\vec{k}) = \langle \vec{k} | \psi \rangle = \int d^3r \, \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \psi \rangle = \int d^3r \, \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle \, \psi(\vec{r}) \quad \stackrel{!}{=} \int d^3r \, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \, \psi(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \quad \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle = \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle^* = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$ Ortsraumwellenfkt. des Impuls-Eigenzustands

- Wellenfunktionen
  - Ortsraumdarstellung: $\psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi \rangle$
  - Impulsraumdarstellung: $\tilde{\psi}(\vec{k}) = \langle \vec{k} | \psi \rangle$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\psi}(\vec{k}) = \langle \vec{k} | \psi \rangle = \int d^3r \, \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \psi \rangle = \int d^3r \, \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle \, \psi(\vec{r}) \quad \stackrel{!}{=} \int d^3r \, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \, \psi(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \quad \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$\Leftrightarrow \quad \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle = \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle^* = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ Ortsraumwellenfkt. des Impuls-Eigenzustands

- Potenzial:

$V(\vec{r}\,', \vec{r}) \equiv \langle \vec{r}\,' | \hat{V}(\vec{r}) | \vec{r} \rangle = V(\vec{r}) \, \langle \vec{r}\,' | \vec{r} \rangle = V(\vec{r}) \, \delta^3(\vec{r}\,' - \vec{r})$ „lokales Potenzial"

- Wellenfunktionen
  - Ortsraumdarstellung: $\psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi \rangle$
  - Impulsraumdarstellung: $\tilde{\psi}(\vec{k}) = \langle \vec{k} | \psi \rangle$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\psi}(\vec{k}) = \langle \vec{k} | \psi \rangle = \int d^3r \, \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \psi \rangle = \int d^3r \, \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle \, \psi(\vec{r}) \quad \stackrel{!}{=} \int d^3r \, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \, \psi(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \quad \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle = \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle^* = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$ Ortsraumwellenfkt. des Impuls-Eigenzustands

- Potenzial:

$$V(\vec{r}\,', \vec{r}) \equiv \langle \vec{r}\,' | \hat{V}(\vec{r}) | \vec{r} \rangle = V(\vec{r}) \, \langle \vec{r}\,' | \vec{r} \rangle = V(\vec{r}) \, \delta^3(\vec{r}\,' - \vec{r})$$ „lokales Potenzial"

$$\langle \vec{k}\,' | \hat{V} | \vec{k} \rangle = \int d^3r' \int d^3r \, \langle \vec{k}\,' | \vec{r}\,' \rangle \langle \vec{r}\,' | \hat{V}(\vec{r}) | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle$$
$$= \int d^3r' \int d^3r \, e^{-i\vec{k}\,'\cdot\vec{r}\,'} \, V(\vec{r}) \delta^3(\vec{r}\,' - \vec{r}) \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

- Wellenfunktionen
  - Ortsraumdarstellung: $\psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi \rangle$
  - Impulsraumdarstellung: $\tilde{\psi}(\vec{k}) = \langle \vec{k} | \psi \rangle$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\psi}(\vec{k}) = \langle \vec{k} | \psi \rangle = \int d^3r \, \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \psi \rangle = \int d^3r \, \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle \, \psi(\vec{r}) \quad \stackrel{!}{=} \int d^3r \, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \, \psi(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \quad \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle = \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle^* = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$ Ortsraumwellenfkt. des Impuls-Eigenzustands

- Potenzial:

$$V(\vec{r}\,', \vec{r}) \equiv \langle \vec{r}\,' | \hat{V}(\vec{r}) | \vec{r} \rangle = V(\vec{r}) \, \langle \vec{r}\,' | \vec{r} \rangle = V(\vec{r}) \, \delta^3(\vec{r}\,' - \vec{r})$$ „lokales Potenzial"

$$\langle \vec{k}\,' | \hat{V} | \vec{k} \rangle = \int d^3r' \int d^3r \, \langle \vec{k}\,' | \vec{r}\,' \rangle \langle \vec{r}\,' | \hat{V}(\vec{r}) | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle$$

$$= \int d^3r' \int d^3r \, e^{-i\vec{k}\,'\cdot\vec{r}\,'} \, V(\vec{r}) \delta^3(\vec{r}\,' - \vec{r}) \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \; = \int d^3r \, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \, V(\vec{r}) = \tilde{V}(\vec{q})$$

($\vec{q} = \vec{k}\,' - \vec{k}$ = Impulsübertrag)

- Green'scher Operator:

$$\langle \vec{k}\,''|\hat{G}_0(z)|\vec{k}\,'\rangle = \langle \vec{k}\,''|(z-\hat{H}_0)^{-1}|\vec{k}\,'\rangle = \left(z-\tfrac{\hbar^2\vec{k}\,'^2}{2\mu}\right)^{-1}\langle \vec{k}\,''|\vec{k}\,'\rangle$$

$$= \left(z-\tfrac{\hbar^2\vec{k}\,'^2}{2\mu}\right)^{-1}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}\,''-\vec{k}\,')$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Green'scher Operator:

$$\langle\vec{k}''|\hat{G}_0(z)|\vec{k}'\rangle = \langle\vec{k}''|(z-\hat{H}_0)^{-1}|\vec{k}'\rangle = \left(z - \frac{\hbar^2\vec{k}'^2}{2\mu}\right)^{-1}\langle\vec{k}''|\vec{k}'\rangle$$

$$= \left(z - \frac{\hbar^2\vec{k}'^2}{2\mu}\right)^{-1}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}''-\vec{k}')$$

$$\Rightarrow\ \langle\vec{k}''|\hat{G}_0(E+i\varepsilon)|\vec{k}'\rangle \overset{E=\frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2\mu}}{=} \frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{\vec{k}^2-\vec{k}'^2+i\varepsilon}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}''-\vec{k}')$$

- Green'scher Operator:

$$\langle\vec{k}\,''|\hat{G}_0(z)|\vec{k}\,'\rangle = \langle\vec{k}\,''|(z-\hat{H}_0)^{-1}|\vec{k}\,'\rangle = \left(z-\frac{\hbar^2\vec{k}\,'^2}{2\mu}\right)^{-1}\langle\vec{k}\,''|\vec{k}\,'\rangle$$

$$= \left(z-\frac{\hbar^2\vec{k}\,'^2}{2\mu}\right)^{-1}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}\,''-\vec{k}\,')$$

$$\Rightarrow\ \langle\vec{k}\,''|\hat{G}_0(E+i\varepsilon)|\vec{k}\,'\rangle \overset{E=\frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2\mu}}{=} \frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{\vec{k}^{\,2}-\vec{k}\,'^2+i\varepsilon}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}\,''-\vec{k}\,')$$

$$= \frac{2\mu}{\hbar^2}\,\tilde{G}_k^{(+)}(\vec{k}\,')\,(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}\,''-\vec{k}\,')$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Green'scher Operator:

$$\langle\vec{k}\,''|\hat{G}_0(z)|\vec{k}\,'\rangle = \langle\vec{k}\,''|(z-\hat{H}_0)^{-1}|\vec{k}\,'\rangle = \left(z - \frac{\hbar^2\vec{k}\,'^2}{2\mu}\right)^{-1}\langle\vec{k}\,''|\vec{k}\,'\rangle$$

$$= \left(z - \frac{\hbar^2\vec{k}\,'^2}{2\mu}\right)^{-1}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}\,''-\vec{k}\,')$$

$$\Rightarrow \langle\vec{k}\,''|\hat{G}_0(E+i\varepsilon)|\vec{k}\,'\rangle \overset{E=\frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2\mu}}{=} \frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{\vec{k}^{\,2}-\vec{k}\,'^2+i\varepsilon}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}\,''-\vec{k}\,')$$

$$= \frac{2\mu}{\hbar^2}\,\tilde{G}_k^{(+)}(\vec{k}\,')\,(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}\,''-\vec{k}\,')$$

$$\Rightarrow \langle\vec{r}|\hat{G}_0(E+i\varepsilon)|\vec{r}\,'\rangle = \int\frac{d^3k''}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\,\langle\vec{r}|\vec{k}\,''\rangle\langle\vec{k}\,''|\hat{G}_0(E+i\varepsilon)|\vec{k}\,'\rangle\langle\vec{k}\,'|\vec{r}\,'\rangle$$

- Green'scher Operator:

$$\langle\vec{k}\,''|\hat{G}_0(z)|\vec{k}\,'\rangle = \langle\vec{k}\,''|(z-\hat{H}_0)^{-1}|\vec{k}\,'\rangle = \Big(z-\frac{\hbar^2\vec{k}\,'^2}{2\mu}\Big)^{-1}\langle\vec{k}\,''|\vec{k}\,'\rangle$$

$$= \Big(z-\frac{\hbar^2\vec{k}\,'^2}{2\mu}\Big)^{-1}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}\,''-\vec{k}\,')$$

$$\Rightarrow\ \langle\vec{k}\,''|\hat{G}_0(E+i\varepsilon)|\vec{k}\,'\rangle \overset{E=\frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2\mu}}{=} \frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{\vec{k}^{\,2}-\vec{k}\,'^2+i\varepsilon}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}\,''-\vec{k}\,')$$

$$= \frac{2\mu}{\hbar^2}\tilde{G}_k^{(+)}(\vec{k}\,')\,(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}\,''-\vec{k}\,')$$

$$\Rightarrow\ \langle\vec{r}|\hat{G}_0(E+i\varepsilon)|\vec{r}\,'\rangle = \int\frac{d^3k''}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\,\langle\vec{r}|\vec{k}\,''\rangle\langle\vec{k}\,''|\hat{G}_0(E+i\varepsilon)|\vec{k}\,'\rangle\langle\vec{k}\,'|\vec{r}\,'\rangle$$

$$= \frac{2\mu}{\hbar^2}\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{k}\,'\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}\,\tilde{G}_k^{(+)}(\vec{k}\,')$$

▶ Green'scher Operator:

$$\langle \vec{k}\,''|\hat{G}_0(z)|\vec{k}\,'\rangle = \langle \vec{k}\,''|(z-\hat{H}_0)^{-1}|\vec{k}\,'\rangle = \left(z - \frac{\hbar^2\vec{k}\,'^2}{2\mu}\right)^{-1}\langle \vec{k}\,''|\vec{k}\,'\rangle$$

$$= \left(z - \frac{\hbar^2\vec{k}\,'^2}{2\mu}\right)^{-1}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}\,''-\vec{k}\,')$$

$$\Rightarrow \langle \vec{k}\,''|\hat{G}_0(E+i\varepsilon)|\vec{k}\,'\rangle \overset{E=\frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2\mu}}{=} \frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{\vec{k}^{\,2}-\vec{k}\,'^2+i\varepsilon}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}\,''-\vec{k}\,')$$

$$= \frac{2\mu}{\hbar^2}\,\tilde{G}_k^{(+)}(\vec{k}\,')\,(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}\,''-\vec{k}\,')$$

$$\Rightarrow \langle \vec{r}|\hat{G}_0(E+i\varepsilon)|\vec{r}\,'\rangle = \int\frac{d^3k''}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\,\langle\vec{r}|\vec{k}\,''\rangle\langle\vec{k}\,''|\hat{G}_0(E+i\varepsilon)|\vec{k}\,'\rangle\langle\vec{k}\,'|\vec{r}\,'\rangle$$

$$= \frac{2\mu}{\hbar^2}\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{k}\,'\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}\,\tilde{G}_k^{(+)}(\vec{k}\,')$$

$$= \frac{2\mu}{\hbar^2}\,G_k^{(+)}(\vec{r},\vec{r}\,')$$

- Lippmann-Schwinger-Gleichung: $|\psi_{\vec{k}}\rangle = |\vec{k}\rangle + \hat{G}_0(E + i\varepsilon)\,\hat{V}\,|\psi_{\vec{k}}\rangle$

- Lippmann-Schwinger-Gleichung: $|\psi_{\vec{k}}\rangle = |\vec{k}\rangle + \hat{G}_0(E + i\varepsilon)\, \hat{V}\, |\psi_{\vec{k}}\rangle$
- Ortsraumdarstellung:

$$\langle\vec{r}|\psi_{\vec{k}}\rangle = \langle\vec{r}|\vec{k}\rangle + \langle\vec{r}|\hat{G}_0(E + i\varepsilon)\, \hat{V}\, |\psi_{\vec{k}}\rangle$$

- Lippmann-Schwinger-Gleichung: $|\psi_{\vec{k}}\rangle = |\vec{k}\rangle + \hat{G}_0(E + i\varepsilon)\,\hat{V}\,|\psi_{\vec{k}}\rangle$
- Ortsraumdarstellung:

$$\langle\vec{r}|\psi_{\vec{k}}\rangle = \langle\vec{r}|\vec{k}\rangle + \langle\vec{r}|\hat{G}_0(E + i\varepsilon)\,\hat{V}\,|\psi_{\vec{k}}\rangle$$

$$= \langle\vec{r}|\vec{k}\rangle + \int d^3r' \int d^3r'' \langle\vec{r}|\hat{G}_0(E + i\varepsilon)|\vec{r}\,'\rangle\langle\vec{r}\,'|\hat{V}|\vec{r}\,''\rangle\langle\vec{r}\,''|\psi_{\vec{k}}\rangle$$

- Lippmann-Schwinger-Gleichung: $|\psi_{\vec{k}}\rangle = |\vec{k}\rangle + \hat{G}_0(E + i\varepsilon)\, \hat{V}\, |\psi_{\vec{k}}\rangle$
- Ortsraumdarstellung:

$$\langle\vec{r}|\psi_{\vec{k}}\rangle = \langle\vec{r}|\vec{k}\rangle + \langle\vec{r}|\hat{G}_0(E + i\varepsilon)\, \hat{V}\, |\psi_{\vec{k}}\rangle$$

$$= \langle\vec{r}|\vec{k}\rangle + \int d^3r' \int d^3r'' \langle\vec{r}|\hat{G}_0(E + i\varepsilon)|\vec{r}\,'\rangle\langle\vec{r}\,'|\hat{V}|\vec{r}\,''\rangle\langle\vec{r}\,''|\psi_{\vec{k}}\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \int d^3r' \int d^3r''\, \tfrac{2\mu}{\hbar^2}\, G_k^{(+)}(\vec{r}, \vec{r}\,')\, V(\vec{r}\,')\, \delta^3(\vec{r}\,' - \vec{r}\,'')\, \psi_{\vec{k}}(\vec{r}\,'')$$

- Lippmann-Schwinger-Gleichung: $|\psi_{\vec{k}}\rangle = |\vec{k}\rangle + \hat{G}_0(E + i\varepsilon)\,\hat{V}\,|\psi_{\vec{k}}\rangle$

- Ortsraumdarstellung:

$$\langle\vec{r}|\psi_{\vec{k}}\rangle = \langle\vec{r}|\vec{k}\rangle + \langle\vec{r}|\hat{G}_0(E + i\varepsilon)\,\hat{V}\,|\psi_{\vec{k}}\rangle$$

$$= \langle\vec{r}|\vec{k}\rangle + \int d^3r' \int d^3r'' \langle\vec{r}|\hat{G}_0(E + i\varepsilon)|\vec{r}\,'\rangle\langle\vec{r}\,'|\hat{V}|\vec{r}\,''\rangle\langle\vec{r}\,''|\psi_{\vec{k}}\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \int d^3r' \int d^3r'' \,\tfrac{2\mu}{\hbar^2}\, G_k^{(+)}(\vec{r},\vec{r}\,')\,V(\vec{r}\,')\,\delta^3(\vec{r}\,' - \vec{r}\,'')\,\psi_{\vec{k}}(\vec{r}\,'')$$

$$= e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \tfrac{2\mu}{\hbar^2} \int d^3r'\, G_k^{(+)}(\vec{r},\vec{r}\,')\,V(\vec{r}\,')\,\psi_{\vec{k}}(\vec{r}\,') \qquad \checkmark$$

T-Matrix

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Def: $\hat{T}\,|\vec{k}\rangle \equiv \hat{V}|\psi_{\vec{k}}\rangle$ T-Matrix

T-Matrix

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Def: $\hat{T}\,|\vec{k}\rangle \equiv \hat{V}|\psi_{\vec{k}}\rangle$ T-Matrix

$\Rightarrow$ $\hat{T}\,|\vec{k}\rangle \overset{\text{LSG}}{=} \hat{V}\left(|\vec{k}\rangle + \hat{G}_0\,\hat{V}|\psi_{\vec{k}}\rangle\right)$

T-Matrix

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Def: $\hat{T}\,|\vec{k}\rangle \equiv \hat{V}|\psi_{\vec{k}}\rangle$ T-Matrix

$$\Rightarrow \quad \hat{T}\,|\vec{k}\rangle \overset{\text{LSG}}{=} \hat{V}\left(|\vec{k}\rangle + \hat{G}_0\hat{V}|\psi_{\vec{k}}\rangle\right) = \left(\hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\hat{T}\right)|\vec{k}\rangle$$

T-Matrix

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Def: $\hat{T}\,|\vec{k}\rangle \equiv \hat{V}|\psi_{\vec{k}}\rangle$ T-Matrix

$\Rightarrow$ $\hat{T}\,|\vec{k}\rangle \stackrel{\text{LSG}}{=} \hat{V}\,\left(|\vec{k}\rangle + \hat{G}_0\,\hat{V}|\psi_{\vec{k}}\rangle\right) = \left(\hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\,\hat{T}\right)|\vec{k}\rangle$

$\Rightarrow$ $\boxed{\hat{T} = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\,\hat{T}}$ Lippmann-Schwinger-Gleichung für die T-Matrix

T-Matrix

- Def: $\hat{T}\,|\vec{k}\rangle \equiv \hat{V}|\psi_{\vec{k}}\rangle$ T-Matrix

$\Rightarrow$ $\hat{T}\,|\vec{k}\rangle \overset{\text{LSG}}{=} \hat{V}\,\left(|\vec{k}\rangle + \hat{G}_0\,\hat{V}|\psi_{\vec{k}}\rangle\right) = \left(\hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\,\hat{T}\right)|\vec{k}\rangle$

$\Rightarrow$ $\boxed{\hat{T} = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\,\hat{T}}$ Lippmann-Schwinger-Gleichung für die T-Matrix

  - gilt zunächst für $\hat{G}_0(E + i\varepsilon)$
  - Verallgemeinerung: $\hat{G}_0(z) \rightarrow \hat{T}(z)$

T-Matrix

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Def: $\hat{T}\,|\vec{k}\rangle \equiv \hat{V}|\psi_{\vec{k}}\rangle$ T-Matrix

$\Rightarrow$ $\hat{T}\,|\vec{k}\rangle \overset{\text{LSG}}{=} \hat{V}\,\left(|\vec{k}\rangle + \hat{G}_0\,\hat{V}|\psi_{\vec{k}}\rangle\right) = \left(\hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\,\hat{T}\right)|\vec{k}\rangle$

$\Rightarrow$ $\boxed{\hat{T} = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\,\hat{T}}$ Lippmann-Schwinger-Gleichung für die T-Matrix

  - gilt zunächst für $\hat{G}_0(E + i\varepsilon)$
  - Verallgemeinerung: $\hat{G}_0(z) \rightarrow \hat{T}(z)$

- Matrixelemente:

$$\langle\vec{k}\,'|\hat{T}\,|\vec{k}\rangle = \langle\vec{k}\,'|\hat{V}|\psi_{\vec{k}}\rangle$$

T-Matrix

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Def: $\hat{T}\,|\vec{k}\rangle \equiv \hat{V}|\psi_{\vec{k}}\rangle$ T-Matrix

$\Rightarrow$ $\hat{T}\,|\vec{k}\rangle \overset{\text{LSG}}{=} \hat{V}\,\left(|\vec{k}\rangle + \hat{G}_0\,\hat{V}|\psi_{\vec{k}}\rangle\right) = \left(\hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\,\hat{T}\right)|\vec{k}\rangle$

$\Rightarrow$ $\boxed{\hat{T} = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\,\hat{T}}$ Lippmann-Schwinger-Gleichung für die T-Matrix

  - gilt zunächst für $\hat{G}_0(E + i\varepsilon)$
  - Verallgemeinerung: $\hat{G}_0(z) \longrightarrow \hat{T}(z)$

- Matrixelemente:

$$\langle\vec{k}\,'|\hat{T}\,|\vec{k}\rangle = \langle\vec{k}\,'|\hat{V}|\psi_{\vec{k}}\rangle = \int d^3r \int d^3r'\,\langle\vec{k}\,'|\vec{r}\,'\rangle\langle\vec{r}\,'|\hat{V}|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|\psi_{\vec{k}}\rangle$$

T-Matrix

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Def: $\hat{T}\,|\vec{k}\rangle \equiv \hat{V}|\psi_{\vec{k}}\rangle$ T-Matrix

$\Rightarrow$ $\hat{T}\,|\vec{k}\rangle \overset{\text{LSG}}{=} \hat{V}\,\left(|\vec{k}\rangle + \hat{G}_0\,\hat{V}|\psi_{\vec{k}}\rangle\right) = \left(\hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\,\hat{T}\right)|\vec{k}\rangle$

$\Rightarrow$ $\boxed{\hat{T} = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\,\hat{T}}$ Lippmann-Schwinger-Gleichung für die T-Matrix

  - gilt zunächst für $\hat{G}_0(E + i\varepsilon)$
  - Verallgemeinerung: $\hat{G}_0(z) \;\rightarrow\; \hat{T}(z)$

- Matrixelemente:

$$\langle\vec{k}\,'|\hat{T}\,|\vec{k}\rangle = \langle\vec{k}\,'|\hat{V}|\psi_{\vec{k}}\rangle = \int d^3r \int d^3r'\,\langle\vec{k}\,'|\vec{r}\,'\rangle\langle\vec{r}\,'|\hat{V}|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|\psi_{\vec{k}}\rangle$$

$$= \int d^3r\, e^{-i\vec{k}\,'\cdot\vec{r}}\,V(\vec{r})\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$$

T-Matrix

- Def: $\hat{T}\,|\vec{k}\rangle \equiv \hat{V}|\psi_{\vec{k}}\rangle$ T-Matrix

$$\Rightarrow \quad \hat{T}\,|\vec{k}\rangle \overset{\text{LSG}}{=} \hat{V}\,\left(|\vec{k}\rangle + \hat{G}_0\,\hat{V}|\psi_{\vec{k}}\rangle\right) = \left(\hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\,\hat{T}\right)|\vec{k}\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{T} = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\,\hat{T}}$$ Lippmann-Schwinger-Gleichung für die T-Matrix

  - gilt zunächst für $\hat{G}_0(E + i\varepsilon)$
  - Verallgemeinerung: $\hat{G}_0(z) \;\rightarrow\; \hat{T}(z)$

- Matrixelemente:

$$\langle\vec{k}\,'|\,\hat{T}\,|\vec{k}\rangle = \langle\vec{k}\,'|\hat{V}|\psi_{\vec{k}}\rangle = \int d^3r \int d^3r'\,\langle\vec{k}\,'|\vec{r}\,'\rangle\langle\vec{r}\,'|\hat{V}|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|\psi_{\vec{k}}\rangle$$

$$= \int d^3r\, e^{-i\vec{k}\,'\cdot\vec{r}}\, V(\vec{r})\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f(\vec{k}\,',\vec{k}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\,\langle\vec{k}\,'|\,\hat{T}(E + i\varepsilon)\,|\vec{k}\rangle}$$

Born'sche Reihe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lippmann-Schwinger-Gleichung: $\hat{T} = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\hat{T}$

$\Rightarrow \quad \hat{T} = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0\hat{V} + \ldots$ ($\hat{=}$ Born'sche Reihe)

Born'sche Reihe

- Lippmann-Schwinger-Gleichung: $\hat{T} = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\hat{T}$

  $\Rightarrow \quad \hat{T} = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0\hat{V} + \ldots \qquad$ ($\hat{=}$ Born'sche Reihe)

- Streuamplitude: $f(\vec{k}\,', \vec{k}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle\vec{k}\,'|\,\hat{T}(E + i\varepsilon)\,|\vec{k}\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} f^{(j)}(\vec{k}\,', \vec{k})$

Born'sche Reihe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lippmann-Schwinger-Gleichung: $\hat{T} = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\hat{T}$

  $\Rightarrow \quad \hat{T} = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0\hat{V} + \ldots$ $\quad$ ($\hat{=}$ Born'sche Reihe)

- Streuamplitude: $f(\vec{k}\,', \vec{k}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\,\langle\vec{k}\,'|\,\hat{T}(E+i\varepsilon)\,|\vec{k}\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} f^{(j)}(\vec{k}\,', \vec{k})$

  - 1. Born'sche Näherung: $f^{(1)}(\vec{k}\,', \vec{k}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\,\langle\vec{k}\,'|\,\hat{V}\,|\vec{k}\rangle = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\,\tilde{V}(\vec{q})$ $\quad\checkmark$

Born'sche Reihe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lippmann-Schwinger-Gleichung: $\hat{T} = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\hat{T}$

  $\Rightarrow \quad \hat{T} = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0\hat{V} + \ldots$ ($\hat{=}$ Born'sche Reihe)

- Streuamplitude: $f(\vec{k}\,', \vec{k}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\langle\vec{k}\,'|\hat{T}(E+i\varepsilon)|\vec{k}\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} f^{(j)}(\vec{k}\,', \vec{k})$

  - 1. Born'sche Näherung: $f^{(1)}(\vec{k}\,', \vec{k}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\langle\vec{k}\,'|\hat{V}|\vec{k}\rangle = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\tilde{V}(\vec{q})$ ✓

  - *n*-te Born'sche Näherung:

    $f^{(n)}(\vec{k}\,', \vec{k}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\langle\vec{k}\,'|\hat{V}\hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0\ldots\hat{V}|\vec{k}\rangle$ (n mal $\hat{V}$)

Born'sche Reihe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lippmann-Schwinger-Gleichung: $\hat{T} = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\hat{T}$

  $\Rightarrow \quad \hat{T} = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0\hat{V} + \ldots \qquad$ ($\hat{=}$ Born'sche Reihe)

- Streuamplitude: $f(\vec{k}\,', \vec{k}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \vec{k}\,' | \hat{T}(E + i\varepsilon) | \vec{k} \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} f^{(j)}(\vec{k}\,', \vec{k})$

  - 1. Born'sche Näherung: $f^{(1)}(\vec{k}\,', \vec{k}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \vec{k}\,' | \hat{V} | \vec{k} \rangle = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \tilde{V}(\vec{q}) \quad \checkmark$

  - *n*-te Born'sche Näherung:

    $f^{(n)}(\vec{k}\,', \vec{k}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \vec{k}\,' | \hat{V}\hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0 \ldots \hat{V} | \vec{k} \rangle \qquad$ (n mal $\hat{V}$)

    Einschieben von $2n - 1$ vollst. Systemen von Impuls-Eigenzuständen

    $\longrightarrow$ gleiches Ergebnis wie in Abschnitt 3.4

- Green'scher Operator: $\hat{G}_0(z) = \left(z - \hat{H}_0\right)^{-1}$

- Green'scher Operator: $\hat{G}_0(z) = \left(z - \hat{H}_0\right)^{-1}$
- analog: $\hat{G}(z) \equiv \left(z - \hat{H}\right)^{-1}$

- Green'scher Operator: $\hat{G}_0(z) = \left(z - \hat{H}_0\right)^{-1}$
- analog: $\hat{G}(z) \equiv \left(z - \hat{H}\right)^{-1}$

$$= \left(z - \hat{H}_0\right)^{-1} + \left(z - \hat{H}_0\right)^{-1} \Big[\underbrace{(z - \hat{H}_0) - (z - \hat{H})}_{= \hat{H} - \hat{H}_0 = \hat{V}} \Big] \left(z - \hat{H}\right)^{-1}$$

- Green'scher Operator: $\hat{G}_0(z) = \left(z - \hat{H}_0\right)^{-1}$
- analog: $\hat{G}(z) \equiv \left(z - \hat{H}\right)^{-1}$

$$= \left(z - \hat{H}_0\right)^{-1} + \left(z - \hat{H}_0\right)^{-1} \Big[\underbrace{(z - \hat{H}_0) - (z - \hat{H})}_{= \hat{H} - \hat{H}_0 = \hat{V}} \Big] \left(z - \hat{H}\right)^{-1}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\hat{G}(z) = \hat{G}_0(z) + \hat{G}_0(z)\hat{V}\hat{G}(z)}$ LSG für den Green'schen Operator

- Green'scher Operator: $\hat{G}_0(z) = \left(z - \hat{H}_0\right)^{-1}$
- analog: $\hat{G}(z) \equiv \left(z - \hat{H}\right)^{-1}$

$$= \left(z - \hat{H}_0\right)^{-1} + \left(z - \hat{H}_0\right)^{-1} \left[\underbrace{(z - \hat{H}_0) - (z - \hat{H})}_{= \hat{H} - \hat{H}_0 = \hat{V}}\right] \left(z - \hat{H}\right)^{-1}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\hat{G}(z) = \hat{G}_0(z) + \hat{G}_0(z)\hat{V}\hat{G}(z)}$ LSG für den Green'schen Operator

→ Born'sche Reihe: $\hat{G} = \hat{G}_0 + \hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0 + \hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0 + ...$

- Green'scher Operator: $\hat{G}_0(z) = \left(z - \hat{H}_0\right)^{-1}$
- analog: $\hat{G}(z) \equiv \left(z - \hat{H}\right)^{-1}$

$$= \left(z - \hat{H}_0\right)^{-1} + \left(z - \hat{H}_0\right)^{-1}\Big[\underbrace{(z - \hat{H}_0) - (z - \hat{H})}_{= \hat{H} - \hat{H}_0 = \hat{V}}\Big]\left(z - \hat{H}\right)^{-1}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\hat{G}(z) = \hat{G}_0(z) + \hat{G}_0(z)\hat{V}\hat{G}(z)}$ LSG für den Green'schen Operator

$\rightarrow$ Born'sche Reihe: $\hat{G} = \hat{G}_0 + \hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0 + \hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0 + \ldots$

$$= \hat{G}_0 + \hat{G}_0\left(\hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\hat{V} + \ldots\right)\hat{G}_0$$

- Green'scher Operator: $\hat{G}_0(z) = \left(z - \hat{H}_0\right)^{-1}$
- analog: $\hat{G}(z) \equiv \left(z - \hat{H}\right)^{-1}$

$$= \left(z - \hat{H}_0\right)^{-1} + \left(z - \hat{H}_0\right)^{-1} \Big[\underbrace{(z - \hat{H}_0) - (z - \hat{H})}_{= \hat{H} - \hat{H}_0 = \hat{V}} \Big] \left(z - \hat{H}\right)^{-1}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\hat{G}(z) = \hat{G}_0(z) + \hat{G}_0(z)\hat{V}\hat{G}(z)}$ LSG für den Green'schen Operator

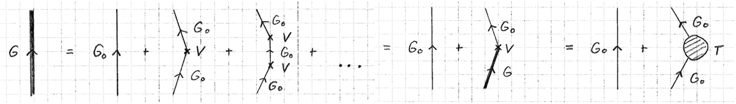
→ Born'sche Reihe: $\hat{G} = \hat{G}_0 + \hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0 + \hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0 + \ldots$

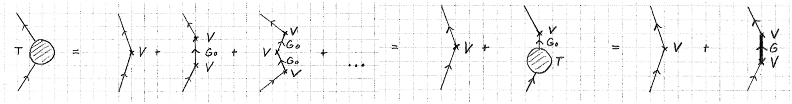
$$= \hat{G}_0 + \hat{G}_0\left(\hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\hat{V} + \ldots\right)\hat{G}_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \hat{G} &= \hat{G}_0 + \hat{G}_0\,\hat{T}\,\hat{G}_0 \\ \hat{T} &= \hat{V} + \hat{V}\,\hat{G}\,\hat{V} \end{aligned}}$$

Diagrammatische Interpretation

- G: voller Propagator $\leftrightarrow$ Ausbreitung der Welle von $\vec{r}$ nach $\vec{r}\,'$
- G_0: freier Propagator $\leftrightarrow$ ungestörte Ausbreitung ohne Potenzial
- T: volle Wechselwirkung
- V: nackte Wechselwirkung





3.6 Das optische Theorem

3.6 Das optische Theorem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$
  - Wahrscheinlichkeitsdichte: $\rho = |\psi|^2$
  - Wahrscheinlichkeitsstromdichte: $\vec{j} = \frac{\hbar}{2\mu i}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)$

3.6 Das optische Theorem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$
  - Wahrscheinlichkeitsdichte: $\rho = |\psi|^2$
  - Wahrscheinlichkeitsstromdichte: $\vec{j} = \frac{\hbar}{2\mu i} \left(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right)$

- stationärer Zustand: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

3.6 Das optische Theorem

- Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$
  - Wahrscheinlichkeitsdichte: $\rho = |\psi|^2$
  - Wahrscheinlichkeitsstromdichte: $\vec{j} = \frac{\hbar}{2\mu i}\left(\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)$

- stationärer Zustand: $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \left(\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right) = \psi^* \vec{\nabla}^2\psi - \psi\vec{\nabla}^2\psi^* = 0$$

3.6 Das optische Theorem

- Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$
  - Wahrscheinlichkeitsdichte: $\rho = |\psi|^2$
  - Wahrscheinlichkeitsstromdichte: $\vec{j} = \frac{\hbar}{2\mu i}\left(\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)$
- stationärer Zustand: $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \left(\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right) = \psi^* \vec{\nabla}^2\psi - \psi\vec{\nabla}^2\psi^* = 0$$

- einlaufende + Streuwelle: $\psi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) + \psi_s(\vec{r})$

3.6 Das optische Theorem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$
  - Wahrscheinlichkeitsdichte: $\rho = |\psi|^2$
  - Wahrscheinlichkeitsstromdichte: $\vec{j} = \frac{\hbar}{2\mu i} \left(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right)$
- stationärer Zustand: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \left(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right) = \psi^* \vec{\nabla}^2 \psi - \psi \vec{\nabla}^2 \psi^* = 0$$

- einlaufende + Streuwelle: $\psi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) + \psi_s(\vec{r})$

$$\Rightarrow \quad \phi^* \vec{\nabla}^2 \phi - \phi \vec{\nabla}^2 \phi^* \; + \; \psi_s^* \vec{\nabla}^2 \psi_s - \psi_s \vec{\nabla}^2 \psi_s^*$$

$$+ \; \phi^* \vec{\nabla}^2 \psi_s - \phi \vec{\nabla}^2 \psi_s^* \; + \; \psi_s^* \vec{\nabla}^2 \phi - \psi_s \vec{\nabla}^2 \phi^* \; = \; 0$$

- einlaufende Welle: $\phi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

  $\Rightarrow \quad \vec{\nabla}^2\phi = -\vec{k}^{\,2}\phi, \quad \vec{\nabla}^2\phi^* = -\vec{k}^{\,2}\phi^* \quad \Rightarrow \quad \phi^*\vec{\nabla}^2\phi - \phi\vec{\nabla}^2\phi^* = 0 \qquad (*)$

  d.h. ϕ erfüllt selbst eine Kontinuitätsgleichung

- einlaufende Welle: $\phi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

  $\Rightarrow \quad \vec{\nabla}^2\phi = -\vec{k}^{\,2}\phi, \quad \vec{\nabla}^2\phi^* = -\vec{k}^{\,2}\phi^* \quad \Rightarrow \quad \phi^*\vec{\nabla}^2\phi - \phi\vec{\nabla}^2\phi^* = 0 \qquad (*)$

  d.h. ϕ erfüllt selbst eine Kontinuitätsgleichung

$$\Rightarrow \quad \psi_s^*\vec{\nabla}^2\psi_s - \psi_s\vec{\nabla}^2\psi_s^* \; = \; -\left(\phi^*\vec{\nabla}^2\psi_s - \phi\vec{\nabla}^2\psi_s^*\right) \; - \; \left(\psi_s^*\vec{\nabla}^2\phi - \psi_s\vec{\nabla}^2\phi^*\right)$$

- einlaufende Welle: $\phi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}^2\phi = -\vec{k}^{\,2}\phi, \quad \vec{\nabla}^2\phi^* = -\vec{k}^{\,2}\phi^* \quad \Rightarrow \quad \phi^*\vec{\nabla}^2\phi - \phi\vec{\nabla}^2\phi^* = 0 \qquad (*)$$

d.h. ϕ erfüllt selbst eine Kontinuitätsgleichung

$$\Rightarrow \psi_s^*\vec{\nabla}^2\psi_s - \psi_s\vec{\nabla}^2\psi_s^* = -\left(\phi^*\vec{\nabla}^2\psi_s - \phi\vec{\nabla}^2\psi_s^*\right) - \left(\psi_s^*\vec{\nabla}^2\phi - \psi_s\vec{\nabla}^2\phi^*\right)$$

$$= -2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\left(\phi^*\vec{\nabla}^2\psi_s - \psi_s\vec{\nabla}^2\phi^*\right) \qquad (\text{da } a - a^* = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,a)$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- einlaufende Welle: $\phi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}^2\phi = -\vec{k}^{\,2}\phi, \quad \vec{\nabla}^2\phi^* = -\vec{k}^{\,2}\phi^* \quad \Rightarrow \quad \phi^*\vec{\nabla}^2\phi - \phi\vec{\nabla}^2\phi^* = 0 \qquad (*)$$

d.h. ϕ erfüllt selbst eine Kontinuitätsgleichung

$$\Rightarrow \psi_s^*\vec{\nabla}^2\psi_s - \psi_s\vec{\nabla}^2\psi_s^* = -\left(\phi^*\vec{\nabla}^2\psi_s - \phi\vec{\nabla}^2\psi_s^*\right) - \left(\psi_s^*\vec{\nabla}^2\phi - \psi_s\vec{\nabla}^2\phi^*\right)$$

$$= -2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\left(\phi^*\vec{\nabla}^2\psi_s - \psi_s\vec{\nabla}^2\phi^*\right) \qquad (\text{da } a - a^* = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,a)$$

$$\overset{(*)}{=} -2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\left(\phi^*\vec{\nabla}^2\psi - \psi\vec{\nabla}^2\phi^*\right)$$

- einlaufende Welle: $\phi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}^2\phi = -\vec{k}^{\,2}\phi, \quad \vec{\nabla}^2\phi^* = -\vec{k}^{\,2}\phi^* \quad \Rightarrow \quad \phi^*\vec{\nabla}^2\phi - \phi\vec{\nabla}^2\phi^* = 0 \qquad (*)$$

d.h. ϕ erfüllt selbst eine Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \psi_s^*\vec{\nabla}^2\psi_s - \psi_s\vec{\nabla}^2\psi_s^* &= -\left(\phi^*\vec{\nabla}^2\psi_s - \phi\vec{\nabla}^2\psi_s^*\right) - \left(\psi_s^*\vec{\nabla}^2\phi - \psi_s\vec{\nabla}^2\phi^*\right) \\
&= -2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\left(\phi^*\vec{\nabla}^2\psi_s - \psi_s\vec{\nabla}^2\phi^*\right) \qquad (\text{da } \ a - a^* = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\, a) \\
&\overset{(*)}{=} -2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\left(\phi^*\vec{\nabla}^2\psi - \psi\vec{\nabla}^2\phi^*\right) \\
&= -2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\phi^*\left(\vec{\nabla}^2 + \vec{k}^{\,2}\right)\psi \\
&= -2\mathrm{i}\,\frac{2\mu}{\hbar^2}\,\mathrm{Im}\,\phi^*\,V\,\psi \qquad \left(\text{da } \ \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\vec{\nabla}^2 + V\right)\psi = \frac{\hbar^2\vec{k}^{\,2}}{2\mu}\psi\right)
\end{aligned}$$

$$\psi_s^* \vec{\nabla}^2 \psi_s - \psi_s \vec{\nabla}^2 \psi_s^* \quad = -2\mathrm{i}\, \tfrac{2\mu}{\hbar^2}\, \mathrm{Im}\, \phi^* V \psi$$

- Integriere über ein (unendlich) großes Volumen $\mathcal{V}$:

$$\int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \left(\psi_s^* \vec{\nabla}^2 \psi_s - \psi_s \vec{\nabla}^2 \psi_s^* \right) = -2\mathrm{i}\, \frac{2\mu}{\hbar^2}\, \mathrm{Im} \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r\, \phi^* V \psi$$

- Integriere über ein (unendlich) großes Volumen $\mathcal{V}$:

$$\int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \left(\psi_s^* \vec{\nabla}^2 \psi_s - \psi_s \vec{\nabla}^2 \psi_s^* \right) = -2i \, \tfrac{2\mu}{\hbar^2} \, \mathrm{Im} \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \phi^* V \psi$$

- linke Seite

$$= \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \left(\psi_s^* \vec{\nabla} \psi_s - \psi_s \vec{\nabla} \psi_s^* \right) = \tfrac{2\mu i}{\hbar} \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s = \tfrac{2\mu i}{\hbar} \int\limits_{\partial\mathcal{V}} dS \, \vec{n} \cdot \vec{j}_s$$

- Integriere über ein (unendlich) großes Volumen $\mathcal{V}$:

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r \left(\psi_s^* \vec{\nabla}^2 \psi_s - \psi_s \vec{\nabla}^2 \psi_s^* \right) = -2\mathrm{i}\, \frac{2\mu}{\hbar^2}\, \mathrm{Im} \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \phi^* V\, \psi$$

- linke Seite

$$= \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \vec{\nabla} \cdot \left(\psi_s^* \vec{\nabla} \psi_s - \psi_s \vec{\nabla} \psi_s^* \right) = \frac{2\mu i}{\hbar} \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s = \frac{2\mu i}{\hbar} \int_{\partial\mathcal{V}} dS\, \vec{n} \cdot \vec{j}_s$$

$$= \frac{2\mu i}{\hbar} \times \text{Gesamtzahl der gestreuten Teilchen pro Zeit}$$

- Integriere über ein (unendlich) großes Volumen $\mathcal{V}$:

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r \left(\psi_s^* \vec{\nabla}^2 \psi_s - \psi_s \vec{\nabla}^2 \psi_s^* \right) = -2i \, \frac{2\mu}{\hbar^2} \, \mathrm{Im} \int_{\mathcal{V}} d^3r \, \phi^* V \psi$$

- linke Seite

$$= \int_{\mathcal{V}} d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \left(\psi_s^* \vec{\nabla} \psi_s - \psi_s \vec{\nabla} \psi_s^* \right) = \frac{2\mu i}{\hbar} \int_{\mathcal{V}} d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s = \frac{2\mu i}{\hbar} \int_{\partial\mathcal{V}} dS \, \vec{n} \cdot \vec{j}_s$$

$$= \frac{2\mu i}{\hbar} \times \text{ Gesamtzahl der gestreuten Teilchen pro Zeit}$$

$$= \frac{2\mu i}{\hbar} \, \sigma_{\mathrm{tot}} \, |\vec{j}_{\mathrm{einl}}|, \qquad \sigma_{\mathrm{tot}} \equiv \sigma = \text{totaler Wirkungsquerschnitt}, \qquad |\vec{j}_{\mathrm{einl}}| = \frac{\hbar k}{\mu}$$

- Integriere über ein (unendlich) großes Volumen $\mathcal{V}$:

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r \left(\psi_s^* \vec{\nabla}^2 \psi_s - \psi_s \vec{\nabla}^2 \psi_s^* \right) = -2\mathrm{i}\, \frac{2\mu}{\hbar^2}\, \mathrm{Im} \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \phi^*\, V\, \psi$$

- linke Seite

$$= \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \vec{\nabla} \cdot \left(\psi_s^* \vec{\nabla} \psi_s - \psi_s \vec{\nabla} \psi_s^* \right) = \frac{2\mu i}{\hbar} \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s = \frac{2\mu i}{\hbar} \int_{\partial\mathcal{V}} dS\, \vec{n} \cdot \vec{j}_s$$

$$= \frac{2\mu i}{\hbar} \times \text{ Gesamtzahl der gestreuten Teilchen pro Zeit}$$

$$= \frac{2\mu i}{\hbar}\, \sigma_{\text{tot}}\, |\vec{j}_{\text{einl}}|, \qquad \sigma_{\text{tot}} \equiv \sigma = \text{totaler Wirkungsquerschnitt}, \qquad |\vec{j}_{\text{einl}}| = \frac{\hbar k}{\mu}$$

$$= 2ik\, \sigma_{\text{tot}}$$

- Integriere über ein (unendlich) großes Volumen $\mathcal{V}$:

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r \left(\psi_s^* \vec{\nabla}^2 \psi_s - \psi_s \vec{\nabla}^2 \psi_s^* \right) = -2\mathrm{i}\, \frac{2\mu}{\hbar^2}\, \mathrm{Im} \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \phi^* V \psi$$

- linke Seite

$$= \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \vec{\nabla} \cdot \left(\psi_s^* \vec{\nabla} \psi_s - \psi_s \vec{\nabla} \psi_s^* \right) = \frac{2\mu i}{\hbar} \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s = \frac{2\mu i}{\hbar} \int_{\partial\mathcal{V}} dS\, \vec{n} \cdot \vec{j}_s$$

$$= \frac{2\mu i}{\hbar} \times \text{Gesamtzahl der gestreuten Teilchen pro Zeit}$$

$$= \frac{2\mu i}{\hbar}\, \sigma_{\mathrm{tot}}\, |\vec{j}_{\mathrm{einl}}|, \qquad \sigma_{\mathrm{tot}} \equiv \sigma = \text{totaler Wirkungsquerschnitt}, \quad |\vec{j}_{\mathrm{einl}}| = \frac{\hbar k}{\mu}$$

$$= 2ik\, \sigma_{\mathrm{tot}}$$

- rechte Seite $= -2\mathrm{i}\, \frac{2\mu}{\hbar^2}\, \mathrm{Im} \int d^3r\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, V(\vec{r})\, \psi(\vec{r})$

- Integriere über ein (unendlich) großes Volumen $\mathcal{V}$:

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r \left(\psi_s^* \vec{\nabla}^2 \psi_s - \psi_s \vec{\nabla}^2 \psi_s^* \right) = -2\mathrm{i}\, \frac{2\mu}{\hbar^2}\, \mathrm{Im} \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \phi^* V\, \psi$$

- linke Seite

$$= \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \vec{\nabla} \cdot \left(\psi_s^* \vec{\nabla} \psi_s - \psi_s \vec{\nabla} \psi_s^* \right) = \frac{2\mu i}{\hbar} \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s = \frac{2\mu i}{\hbar} \int_{\partial\mathcal{V}} dS\, \vec{n} \cdot \vec{j}_s$$

$= \frac{2\mu i}{\hbar} \times$ Gesamtzahl der gestreuten Teilchen pro Zeit

$= \frac{2\mu i}{\hbar}\, \sigma_{\mathrm{tot}}\, |\vec{j}_{\mathrm{einl}}|, \qquad \sigma_{\mathrm{tot}} \equiv \sigma$ = totaler Wirkungsquerschnitt, $\quad |\vec{j}_{\mathrm{einl}}| = \frac{\hbar k}{\mu}$

$$= 2ik\, \sigma_{\mathrm{tot}}$$

- rechte Seite $\;= -2\mathrm{i}\, \frac{2\mu}{\hbar^2}\, \mathrm{Im} \int d^3r\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} V(\vec{r})\, \psi(\vec{r})$

Streuamplitude: $\quad f(\vec{k}\,', \vec{k}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3r\, e^{-i\vec{k}\,'\cdot\vec{r}}\, V(\vec{r})\, \psi_{\vec{k}}(\vec{r})$

- Integriere über ein (unendlich) großes Volumen $\mathcal{V}$:

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r \left(\psi_s^* \vec{\nabla}^2 \psi_s - \psi_s \vec{\nabla}^2 \psi_s^* \right) = -2\mathrm{i}\, \tfrac{2\mu}{\hbar^2}\, \mathrm{Im} \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \phi^* V\, \psi$$

- linke Seite

$$= \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \vec{\nabla} \cdot \left(\psi_s^* \vec{\nabla} \psi_s - \psi_s \vec{\nabla} \psi_s^* \right) = \tfrac{2\mu i}{\hbar} \int_{\mathcal{V}} d^3r\, \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s = \tfrac{2\mu i}{\hbar} \int_{\partial\mathcal{V}} dS\, \vec{n} \cdot \vec{j}_s$$

$= \tfrac{2\mu i}{\hbar} \times$ Gesamtzahl der gestreuten Teilchen pro Zeit

$= \tfrac{2\mu i}{\hbar}\, \sigma_{\mathrm{tot}}\, |\vec{j}_{\mathrm{einl}}|, \qquad \sigma_{\mathrm{tot}} \equiv \sigma =$ totaler Wirkungsquerschnitt, $\quad |\vec{j}_{\mathrm{einl}}| = \tfrac{\hbar k}{\mu}$

$= 2ik\, \sigma_{\mathrm{tot}}$

- rechte Seite $\;= -2\mathrm{i}\, \tfrac{2\mu}{\hbar^2}\, \mathrm{Im} \int d^3r\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} V(\vec{r})\, \psi(\vec{r}) \;= 8\pi \mathrm{i}\, \mathrm{Im}\, f(\vec{k}, \vec{k})$

Streuamplitude: $\quad f(\vec{k}\,', \vec{k}) = -\tfrac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3r\, e^{-i\vec{k}\,'\cdot\vec{r}}\, V(\vec{r})\, \psi_{\vec{k}}(\vec{r})$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k} \, \mathrm{Im}\, f(\vec{k}, \vec{k})$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k} \, \text{Im} \, f(\vec{k}, \vec{k})$$

- $f(\vec{k}, \vec{k}) \equiv f_k(\theta = 0) \equiv f_k(0)$: Streuamplitude in Vorwärtsrichtung

$\Rightarrow \;\; \sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} \, \mathrm{Im}\, f(\vec{k}, \vec{k})$

- $f(\vec{k}, \vec{k}) \equiv f_k(\theta = 0) \equiv f_k(0)$: Streuamplitude in Vorwärtsrichtung

$\Rightarrow$ „optisches Theorem": $\boxed{\sigma_{tot} = \dfrac{4\pi}{k} \, \mathrm{Im}\, f_k(0)}$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k} \, \text{Im}\, f(\vec{k}, \vec{k})$$

- $f(\vec{k}, \vec{k}) \equiv f_k(\theta = 0) \equiv f_k(0)$: Streuamplitude in Vorwärtsrichtung

$\Rightarrow$ „optisches Theorem“: $\boxed{\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k} \, \text{Im}\, f_k(0)}$

- qualitative Interpretation:

  Die gestreuten Teilchen fehlen in der Vorwärtsrichtung.
  In der Wellenbeschreibung entspricht das einer destruktiven Interferenz von einlaufender und Streuwelle, die mit dem Imaginärteil der Streuamplitude zusammenhängt.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Born'sche Reihe: $f_k(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_k^{(n)}(\theta, \varphi)$

- Born'sche Reihe: $f_k(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_k^{(n)}(\theta, \varphi)$
- Sei $V(\vec{r}) = gv(\vec{r})$, $g = const.$ („Kopplungskonstante"), z.B. $g = e$

  $\Rightarrow f_k^{(n)} \propto g^n$

- **Born'sche Reihe:** $f_k(\theta,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_k^{(n)}(\theta,\varphi)$
- Sei $V(\vec{r}) = g v(\vec{r})$, $g = const.$ („Kopplungskonstante"), z.B. $g = e$

  $\Rightarrow\ f_k^{(n)} \propto g^n$

  $\Rightarrow\ \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| f_k^{(1)} + f_k^{(2)} + \ldots \right|^2 = \underbrace{\left| f_k^{(1)} \right|^2}_{\propto g^2} + \underbrace{\left(f_k^{(1)\,*} f_k^{(2)} + f_k^{(1)} f_k^{(2)\,*} \right)}_{\propto g^3} + \ldots$

- **Born'sche Reihe:** $f_k(\theta,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_k^{(n)}(\theta,\varphi)$
- Sei $V(\vec{r}) = g v(\vec{r})$, $g = const.$ („Kopplungskonstante"), z.B. $g = e$

$$\Rightarrow \quad f_k^{(n)} \propto g^n$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| f_k^{(1)} + f_k^{(2)} + \ldots \right|^2 = \underbrace{\left| f_k^{(1)} \right|^2}_{\propto g^2} + \underbrace{\left(f_k^{(1)\,*} f_k^{(2)} + f_k^{(1)} f_k^{(2)\,*} \right)}_{\propto g^3} + \ldots$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{\text{tot}} = \underbrace{\sigma_{\text{tot}}^{(1)}}_{\propto g^2} + \cdots = \frac{4\pi}{k}\,\text{Im}\left(\underbrace{f_k^{(1)}(0)}_{\propto g} + \underbrace{f_k^{(2)}(0)}_{\propto g^2} + \ldots \right)$$

- Born'sche Reihe: $f_k(\theta,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_k^{(n)}(\theta,\varphi)$
- Sei $V(\vec{r}) = g v(\vec{r})$, $g = const.$ („Kopplungskonstante"), z.B. $g = e$

$$\Rightarrow \quad f_k^{(n)} \propto g^n$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| f_k^{(1)} + f_k^{(2)} + \dots \right|^2 = \underbrace{\left| f_k^{(1)} \right|^2}_{\propto g^2} + \underbrace{\left(f_k^{(1)\,*} f_k^{(2)} + f_k^{(1)} f_k^{(2)\,*} \right)}_{\propto g^3} + \dots$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{\text{tot}} = \underbrace{\sigma_{\text{tot}}^{(1)}}_{\propto g^2} + \cdots = \frac{4\pi}{k} \,\text{Im}\left(\underbrace{f_k^{(1)}(0)}_{\propto g} + \underbrace{f_k^{(2)}(0)}_{\propto g^2} + \dots \right)$$

$\Rightarrow$ Es muss gelten:

- $\text{Im}\, f_k^{(1)}(0) = 0$
- $\sigma_{\text{tot}}^{(1)} = \int d\Omega \, |f_k^{(1)}(\theta,\varphi)|^2 = \frac{4\pi}{k}\,\text{Im}\, f_k^{(2)}(0) \quad \Rightarrow$ $\text{Im}\, f_k^{(2)}(0) \neq 0$, sofern $f_k^{(1)}(\theta,\varphi)$ nicht überall verschwindet.