TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

# 2. Ladungskonjugation

## 2. Ladungskonjugation

- Dirac-Gleichung im elektromagnetischen Feld
  - Elektron ($q = -e$): $$\left(i\not{\partial} + \frac{e}{\hbar c}\not{A} - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0 \qquad (1)$$
  - Positron ($q = +e$): $$\left(i\not{\partial} - \frac{e}{\hbar c}\not{A} - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi_C = 0 \qquad (2)$$

## 2. Ladungskonjugation

- Dirac-Gleichung im elektromagnetischen Feld
  - Elektron ($q = -e$): $$\left(i\partial\!\!\!/ + \frac{e}{\hbar c}A\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0 \qquad (1)$$
  - Positron ($q = +e$): $$\left(i\partial\!\!\!/ - \frac{e}{\hbar c}A\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi_C = 0 \qquad (2)$$

  Wie sieht die ladungskonjugierte Lösung $\psi_C(x)$ aus, wenn $\psi(x)$ bekannt ist?

## 2. Ladungskonjugation

- Dirac-Gleichung im elektromagnetischen Feld
  - Elektron ($q = -e$): $$\left(i\not\partial + \frac{e}{\hbar c}\not A - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0 \qquad (1)$$
  - Positron ($q = +e$): $$\left(i\not\partial - \frac{e}{\hbar c}\not A - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi_C = 0 \qquad (2)$$

  Wie sieht die ladungskonjugierte Lösung $\psi_C(x)$ aus, wenn $\psi(x)$ bekannt ist?

- Komplexe Konjugation von (1):

$$\left[-\gamma^{\mu *}\left(i\partial_\mu - \frac{e}{\hbar c}A_\mu\right) - \frac{mc}{\hbar}\right]\psi^*(x) = 0$$

## 2. Ladungskonjugation

- Dirac-Gleichung im elektromagnetischen Feld
  - Elektron ($q = -e$): $\left(i\partial\!\!\!/ + \frac{e}{\hbar c}A\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0 \qquad (1)$
  - Positron ($q = +e$): $\left(i\partial\!\!\!/ - \frac{e}{\hbar c}A\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi_C = 0 \qquad (2)$

  Wie sieht die ladungskonjugierte Lösung $\psi_C(x)$ aus, wenn $\psi(x)$ bekannt ist?

- Komplexe Konjugation von (1):

  $$\left[-\gamma^{\mu *}\left(i\partial_\mu - \frac{e}{\hbar c}A_\mu\right) - \frac{mc}{\hbar}\right]\psi^*(x) = 0$$

  $$\gamma^{\mu *} = \left\{\begin{array}{ccc} \gamma^\mu & \text{für} & \mu = 0, 1, 3 \\ -\gamma^\mu & & \mu = 2 \end{array}\right\} = \gamma^2\gamma^\mu\gamma^2 \ , \qquad \gamma^2\gamma^2 = -1$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

## 2. Ladungskonjugation

- Dirac-Gleichung im elektromagnetischen Feld
  - Elektron ($q = -e$): $$\left(i\partial\!\!\!/ + \frac{e}{\hbar c}A\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0 \qquad (1)$$
  - Positron ($q = +e$): $$\left(i\partial\!\!\!/ - \frac{e}{\hbar c}A\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi_C = 0 \qquad (2)$$

  Wie sieht die ladungskonjugierte Lösung $\psi_C(x)$ aus, wenn $\psi(x)$ bekannt ist?

- Komplexe Konjugation von (1):

$$\left[-\gamma^{\mu *}\left(i\partial_\mu - \frac{e}{\hbar c}A_\mu\right) - \frac{mc}{\hbar}\right]\psi^*(x) = 0$$

$$\gamma^{\mu *} = \left\{ \begin{array}{ccc} \gamma^\mu & \text{für} & \mu = 0, 1, 3 \\ -\gamma^\mu & & \mu = 2 \end{array} \right\} = \gamma^2\gamma^\mu\gamma^2 \; , \qquad \gamma^2\gamma^2 = -1$$

$$\Rightarrow \quad -\gamma^2\left[\gamma^\mu\left(i\partial_\mu - \frac{e}{\hbar c}A_\mu\right) - \frac{mc}{\hbar}\right]\gamma^2\psi^*(x) = 0$$

## 2. Ladungskonjugation

- Dirac-Gleichung im elektromagnetischen Feld
  - Elektron ($q = -e$): $$\left(i\partial\!\!\!/ + \frac{e}{\hbar c}A\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0 \qquad (1)$$
  - Positron ($q = +e$): $$\left(i\partial\!\!\!/ - \frac{e}{\hbar c}A\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi_C = 0 \qquad (2)$$

  Wie sieht die ladungskonjugierte Lösung $\psi_C(x)$ aus, wenn $\psi(x)$ bekannt ist?

- Komplexe Konjugation von (1):

$$\left[-\gamma^{\mu *}\left(i\partial_\mu - \frac{e}{\hbar c}A_\mu\right) - \frac{mc}{\hbar}\right]\psi^*(x) = 0$$

$$\gamma^{\mu *} = \left\{ \begin{array}{ccc} \gamma^\mu & \text{für} & \mu = 0, 1, 3 \\ -\gamma^\mu & & \mu = 2 \end{array} \right\} = \gamma^2\gamma^\mu\gamma^2 \,, \qquad \gamma^2\gamma^2 = -1$$

$$\Rightarrow \quad -\gamma^2\left[i\partial\!\!\!/ - \frac{e}{\hbar c}A\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar}\right]\gamma^2\psi^*(x) = 0$$

## 2. Ladungskonjugation

- Dirac-Gleichung im elektromagnetischen Feld
  - Elektron ($q = -e$): $$\left(i\partial\!\!\!/ + \frac{e}{\hbar c}A\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0 \qquad (1)$$
  - Positron ($q = +e$): $$\left(i\partial\!\!\!/ - \frac{e}{\hbar c}A\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi_C = 0 \qquad (2)$$

  Wie sieht die ladungskonjugierte Lösung $\psi_C(x)$ aus, wenn $\psi(x)$ bekannt ist?

- Komplexe Konjugation von (1):

$$\left[-\gamma^{\mu *}\left(i\partial_\mu - \frac{e}{\hbar c}A_\mu\right) - \frac{mc}{\hbar}\right]\psi^*(x) = 0$$

$$\gamma^{\mu *} = \left\{\begin{array}{ccc} \gamma^\mu & \text{für} & \mu = 0, 1, 3 \\ -\gamma^\mu & & \mu = 2 \end{array}\right\} = \gamma^2\gamma^\mu\gamma^2 \ , \qquad \gamma^2\gamma^2 = -1$$

$$\Rightarrow \quad \left[i\partial\!\!\!/ - \frac{e}{\hbar c}A\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar}\right]\gamma^2\psi^*(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_C(x) = e^{i\varphi}\gamma^2\psi^*(x)$$

$$\psi_C(x) = e^{i\varphi}\gamma^2\psi^*(x)$$

$$\psi_C(x) = e^{i\varphi}\gamma^2\psi^*(x)$$

- übliche Wahl: $e^{i\varphi} = \mathrm{i} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{i}\gamma^2 =$ reelle Matrix

$$\psi_C(x) = e^{i\varphi}\gamma^2\psi^*(x)$$

- übliche Wahl: $e^{i\varphi} = \mathrm{i} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{i}\gamma^2 =$ reelle Matrix
- übliche Notation:

$$\boxed{\psi_C(x) = C\gamma^0\psi^*(x) = C\overline{\psi}^T(x)\,, \qquad C \equiv i\gamma^2\gamma^0}$$

$$\psi_C(x) = e^{i\varphi}\gamma^2\psi^*(x)$$

- übliche Wahl: $e^{i\varphi} = \mathrm{i} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{i}\gamma^2 =$ reelle Matrix
- übliche Notation:

$$\boxed{\psi_C(x) = C\gamma^0\psi^*(x) = C\overline{\psi}^T(x)\,, \qquad C \equiv i\gamma^2\gamma^0}$$

(gilt in Dirac-Darstellung, kann in anderen Darstellungen anders aussehen!)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

# 3. Zeitumkehr (Bewegungsumkehr)

## 3. Zeitumkehr (Bewegungsumkehr)

- relativ kompliziert (antiunitäre Transformation, s. z.B. Schwabl)

  → hier: etwas vereinfachte Idee

## 3. Zeitumkehr (Bewegungsumkehr)

- relativ kompliziert (antiunitäre Transformation, s. z.B. Schwabl)

  → hier: etwas vereinfachte Idee

- Dirac-Gleichung im elektromagnetischen Feld (nicht kovariante Form):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{r}) = \left[ \vec{\alpha} \cdot \frac{\hbar c}{i} \left( \vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar c} \vec{A}(t, \vec{r}) \right) + \beta m c^2 + q\phi(t, \vec{r}) \right] \psi(t, \vec{r})$$

## 3. Zeitumkehr (Bewegungsumkehr)

- relativ kompliziert (antiunitäre Transformation, s. z.B. Schwabl)

  → hier: etwas vereinfachte Idee

- Dirac-Gleichung im elektromagnetischen Feld (nicht kovariante Form):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{r}) = \left[\vec{\alpha} \cdot \frac{\hbar c}{i}\left(\vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar c}\vec{A}(t, \vec{r})\right) + \beta mc^2 + q\phi(t, \vec{r})\right] \psi(t, \vec{r})$$

- Betrachte einen „rückwärts laufenden Film”:
  - Koordinaten: $(t, \vec{r}) \to (-t, \vec{r})$
  - elektromagnetische Ladungen und Ströme: $\rho \to \rho, \ \ \vec{j} \to -\vec{j}$

$$\Rightarrow \ \vec{E} \to \vec{E}, \ \ \vec{B} \to -\vec{B} \quad \Rightarrow \ \phi(t, \vec{r}) \to \phi(-t, \vec{r}), \ \ \vec{A}(t, \vec{r}) \to -\vec{A}(-t, \vec{r})$$

- Dirac-Gleichung mit elektromagnetischen Feldern:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(t,\vec{r}) = \left[\vec{\alpha}\cdot\frac{\hbar c}{i}\left(\vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar c}\vec{A}(t,\vec{r})\right) + \beta mc^2 + q\phi(t,\vec{r})\right]\psi(t,\vec{r})$$

- Dirac-Gleichung mit zeitumgekehrten elmagn. Feldern:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi_T(t,\vec{r}) = \left[\vec{\alpha}\cdot\frac{\hbar c}{i}\left(\vec{\nabla} + \frac{iq}{\hbar c}\vec{A}(-t,\vec{r})\right) + \beta mc^2 + q\phi(-t,\vec{r})\right]\psi_T(t,\vec{r})$$

- Dirac-Gleichung mit elektromagnetischen Feldern:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(t,\vec{r}) = \left[\vec{\alpha}\cdot\frac{\hbar c}{i}\left(\vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar c}\vec{A}(t,\vec{r})\right) + \beta mc^2 + q\phi(t,\vec{r})\right]\psi(t,\vec{r})$$

- Dirac-Gleichung mit zeitumgekehrten elmagn. Feldern:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi_T(t,\vec{r}) = \left[\vec{\alpha}\cdot\frac{\hbar c}{i}\left(\vec{\nabla} + \frac{iq}{\hbar c}\vec{A}(-t,\vec{r})\right) + \beta mc^2 + q\phi(-t,\vec{r})\right]\psi_T(t,\vec{r})$$

- Lösung:

$$\boxed{\psi_T(t,\vec{r}) = \sigma^{13}\psi^*(-t,\vec{r}) = i\gamma^1\gamma^3\psi^*(-t,\vec{r})}$$

# 3. Streutheorie

# 3. Streutheorie



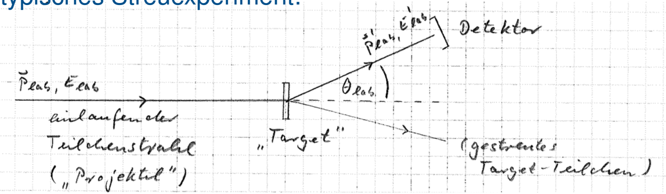
Ab jetzt behandeln wir die Quantenmechanik wieder nichtrelativistisch.

# 3.1 Einführung und Grundbegriffe

# 3.1 Einführung und Grundbegriffe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

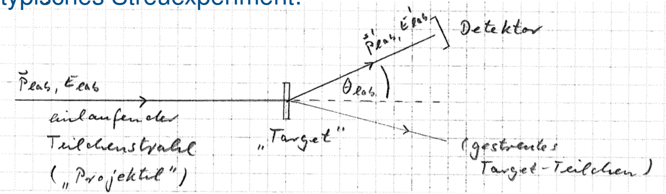
- typisches Streuexperiment:



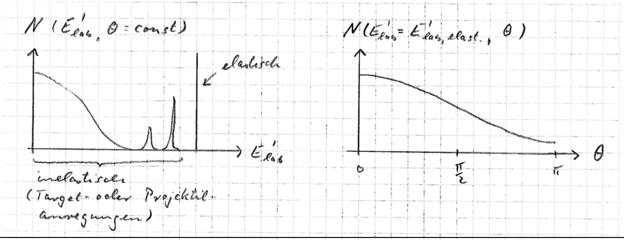
# 3.1 Einführung und Grundbegriffe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

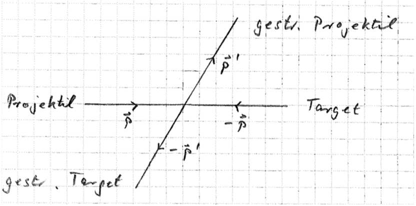
- typisches Streuexperiment:




- Messung: Zählrate $N(E'_{\mathrm{lab}}, \theta_{\mathrm{lab}})$

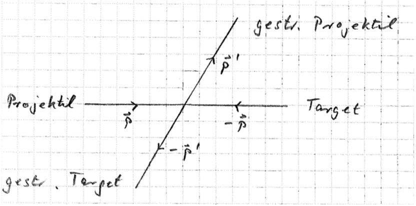


- in der Regel besser: Schwerpunktsystem (CMS)




Streuwinkel: $\cos\theta = \frac{\vec{p}\cdot\vec{p}\,'}{|\vec{p}||\vec{p}\,'|}$

- in der Regel besser: Schwerpunktsystem (CMS)




Streuwinkel: $\cos\theta = \frac{\vec{p}\cdot\vec{p}\,'}{|\vec{p}||\vec{p}\,'|}$

- elastische Streuung im CMS: $|\vec{p}\,'| = |\vec{p}| \quad \Leftrightarrow \quad E' = E \quad (= \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m})$

# Wirkungsquerschnitt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- (differenzieller) Wirkungsquerschnitt $= \dfrac{\text{„interessante" Ereignisse pro Zeit}}{\text{einlaufende Projektilteilchen pro Zeit und Fläche}}$

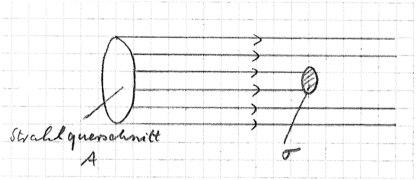
  $\rightarrow$ Dimension = Fläche

# Wirkungsquerschnitt

- (differenzieller) Wirkungsquerschnitt = $\dfrac{\text{„interessante" Ereignisse pro Zeit}}{\text{einlaufende Projektilteilchen pro Zeit und Fläche}}$

  → Dimension = Fläche

- anschaulich:




Zahl der „Ereignisse":

$$N_{\text{abs}} = \frac{\sigma}{A} N_{\text{einl}}$$

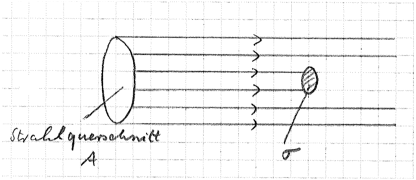
$$\Leftrightarrow \quad \sigma = \frac{N_{\text{abs}}}{N_{\text{einl}}/A}$$

# Wirkungsquerschnitt

- (differenzieller) Wirkungsquerschnitt = $\dfrac{\text{„interessante" Ereignisse pro Zeit}}{\text{einlaufende Projektilteilchen pro Zeit und Fläche}}$

  $\rightarrow$ Dimension = Fläche

- anschaulich:




Zahl der „Ereignisse":

$$N_{\text{abs}} = \frac{\sigma}{A} N_{\text{einl}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma = \frac{N_{\text{abs}}}{N_{\text{einl}}/A}$$

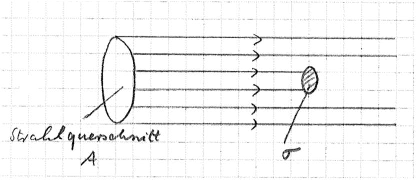
- häufig verwendete Einheit: 1b = 1 barn („Scheune")

# Wirkungsquerschnitt

- (differenzieller) Wirkungsquerschnitt = $\dfrac{\text{„interessante" Ereignisse pro Zeit}}{\text{einlaufende Projektilteilchen pro Zeit und Fläche}}$

  $\rightarrow$ Dimension = Fläche

- anschaulich:




Zahl der „Ereignisse":

$$N_{\mathrm{abs}} = \frac{\sigma}{A}\, N_{\mathrm{einl}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma = \frac{N_{\mathrm{abs}}}{N_{\mathrm{einl}}/A}$$

- häufig verwendete Einheit: 1b = 1 barn („Scheune")

  $= 10^{-24}\mathrm{cm}^2 = 100\,\mathrm{fm}^2$

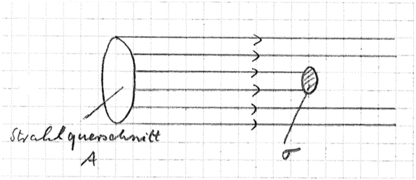
# Wirkungsquerschnitt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- (differenzieller) Wirkungsquerschnitt = $\dfrac{\text{„interessante" Ereignisse pro Zeit}}{\text{einlaufende Projektilteilchen pro Zeit und Fläche}}$

  $\rightarrow$ Dimension = Fläche

- anschaulich:




Zahl der „Ereignisse":

$$N_{\text{abs}} = \frac{\sigma}{A} N_{\text{einl}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma = \frac{N_{\text{abs}}}{N_{\text{einl}}/A}$$

- häufig verwendete Einheit: 1b = 1 barn („Scheune")

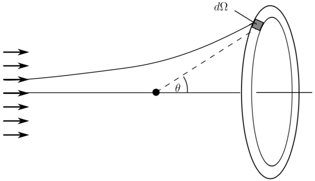
  $= 10^{-24}\text{cm}^2 = 100\,\text{fm}^2 \quad = \pi R^2 \rightarrow R = 5.6$ fm (größerer Atomkern)

# Wirkungsquerschnitt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Für uns relevante etwas konkretere Definition des Wirkungsquerschnitts:

$$d\sigma(\theta, \varphi) = \frac{d\sigma(\theta,\varphi)}{d\Omega}\, d\Omega$$

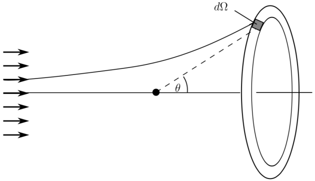



$$= \frac{\text{in das Raumwinkelelement } d\Omega \text{ gestreute Teilchen pro Zeit}}{\text{einlaufende Teilchen pro Zeit und Fläche}}$$

# Wirkungsquerschnitt

- Für uns relevante etwas konkretere Definition des Wirkungsquerschnitts:

$$d\sigma(\theta,\varphi) = \frac{d\sigma(\theta,\varphi)}{d\Omega}\, d\Omega$$




$$= \frac{\text{in das Raumwinkelelement } d\Omega \text{ gestreute Teilchen pro Zeit}}{\text{einlaufende Teilchen pro Zeit und Fläche}}$$

- totaler Wirkungsquerschnitt: $\sigma = \int d\Omega \, \frac{d\sigma}{d\Omega}$

# Vereinfachende Annahmen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. nur Prozesse $A + B \rightarrow A + B$,

   d.h. keine Teilchenproduktion, -vernichtung oder -umwandlung

# Vereinfachende Annahmen

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

1. nur Prozesse $A + B \to A + B$,
   d.h. keine Teilchenproduktion, -vernichtung oder -umwandlung
2. (vorläufig) nur elastische Streuung,
   d.h. keine inneren Anregungen von Target oder Projektil

# Vereinfachende Annahmen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. nur Prozesse $A + B \rightarrow A + B$,
   d.h. keine Teilchenproduktion, -vernichtung oder -umwandlung
2. (vorläufig) nur elastische Streuung,
   d.h. keine inneren Anregungen von Target oder Projektil
3. keine Kohärenzeffekte durch Streuung an verschiedenen Target-Teilchen
   (wie z.B. Bragg-Streuung an Kristallen)

# Vereinfachende Annahmen



1. nur Prozesse $A + B \to A + B$,

   d.h. keine Teilchenproduktion, -vernichtung oder -umwandlung

2. (vorläufig) nur elastische Streuung,

   d.h. keine inneren Anregungen von Target oder Projektil

3. keine Kohärenzeffekte durch Streuung an verschiedenen Target-Teilchen

   (wie z.B. Bragg-Streuung an Kristallen)

   - theoretische Beschreibung: nur ein Target-Teilchen
   - Vergleich mit dem Experiment:

     Teile gemessene Zählraten durch Zahl der Target-Teilchen
   - Voraussetzung: $\Delta x \ll d$

     $\Delta x$: räumliche Ausdehnung des Wellenpakets des Projektils
     $d$: Abstand der Target-Teilchen

- Beispiel: Streuung von Elektronen ($mc^2 = 511$ keV)
  an Kernen in einem Kristall ($d = 1$ Å $= 10^5$ fm)

Impulsunschärfe: $\Delta p > \frac{\hbar}{2\Delta x} \gg \frac{\hbar}{2d} = \frac{\hbar c}{2dc} = \frac{200\text{ MeV fm}}{2 \cdot 10^5\text{ fm } c} = 1\text{ keV}/c$

$$\rightarrow \Delta E = \frac{(\Delta p)^2}{2m} \sim \frac{1}{2 \cdot 511}\text{ keV} \approx 1\text{ eV}$$

- **Beispiel:** Streuung von Elektronen ($mc^2 = 511$ keV)
  an Kernen in einem Kristall ($d = 1$ Å $= 10^5$ fm)

  **Impulsunschärfe:** $\Delta p > \frac{\hbar}{2\Delta x} \gg \frac{\hbar}{2d} = \frac{\hbar c}{2dc} = \frac{200\text{ MeV fm}}{2\cdot 10^5\text{ fm } c} = 1\text{ keV}/c$

  $$\rightarrow \Delta E = \frac{(\Delta p)^2}{2m} \sim \frac{1}{2\cdot 511}\text{ keV} \approx 1\text{ eV}$$

4. kein Spin

- **Beispiel:** Streuung von Elektronen ($mc^2 = 511$ keV) an Kernen in einem Kristall ($d = 1$ Å $= 10^5$ fm)

  Impulsunschärfe: $\Delta p > \frac{\hbar}{2\Delta x} \gg \frac{\hbar}{2d} = \frac{\hbar c}{2dc} = \frac{200 \text{ MeV fm}}{2 \cdot 10^5 \text{ fm } c} = 1 \text{ keV}/c$

  $$\rightarrow \Delta E = \frac{(\Delta p)^2}{2m} \sim \frac{1}{2 \cdot 511} \text{ keV} \approx 1 \text{ eV}$$

4. kein Spin

5. Das Wechselwirkungspotenzial $V(\vec{r})$ hängt nur vom Relativvektor $\vec{r}$ zwischen Projektil und Target ab.

- **Beispiel:** Streuung von Elektronen ($mc^2 = 511$ keV) an Kernen in einem Kristall ($d = 1$ Å $= 10^5$ fm)

  Impulsunschärfe: $\Delta p > \frac{\hbar}{2\Delta x} \gg \frac{\hbar}{2d} = \frac{\hbar c}{2dc} = \frac{200 \text{ MeV fm}}{2 \cdot 10^5 \text{ fm } c} = 1 \text{ keV}/c$

  $$\rightarrow \Delta E = \frac{(\Delta p)^2}{2m} \sim \frac{1}{2 \cdot 511} \text{ keV} \approx 1 \text{ eV}$$

4. kein Spin

5. Das Wechselwirkungspotenzial $V(\vec{r})$ hängt nur vom Relativvektor $\vec{r}$ zwischen Projektil und Target ab.

   Abseparation der Schwerpunktbewegung

   $\rightarrow$ äquivalentes Einteilchenproblem im CMS:

   Streuung eines Teilchens mit der reduzierten Masse $\mu = \left(\frac{1}{m_P} + \frac{1}{m_T}\right)^{-1}$ am Potenzial $V(\vec{r})$

6. Der Streuprozess kann als stationäres Problem behandelt werden.
   → Verwendung der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung

6. Der Streuprozess kann als stationäres Problem behandelt werden.

→ Verwendung der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung

- anschaulich:

  konstant einlaufende Wasser- oder Lichtwelle, die an einem (räumlich begrenzten) Hindernis gebeugt wird

6. Der Streuprozess kann als stationäres Problem behandelt werden.
   → Verwendung der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung

   - anschaulich:

     konstant einlaufende Wasser- oder Lichtwelle, die an einem (räumlich begrenzten) Hindernis gebeugt wird

   - Voraussetzung:

     Das Potenzial ist räumlich begrenzt oder fällt genügend schnell ab, und die Wellenpakete des realen Problems sind viel größer als die Reichweite des Potenzials.

# 3.2 Die Streuamplitude

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

## 3.2 Die Streuamplitude

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- zeitabhängige Schrödinger-Gleichung:

$$\left( - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right) \Psi(t, \vec{r}) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \vec{r})$$

## 3.2 Die Streuamplitude

- zeitabhängige Schrödinger-Gleichung:

$$\Big( -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(\vec{r})\Big)\Psi(t,\vec{r}) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\Psi(t,\vec{r})$$

- stationäre Lösung: $\Psi(t,\vec{r}) = \psi(\vec{r})e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$

  → zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung: $\Big( -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(\vec{r})\Big)\psi(\vec{r}) = E\,\psi(\vec{r})$

## 3.2 Die Streuamplitude

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- zeitabhängige Schrödinger-Gleichung:

$$\Big( -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(\vec{r})\Big)\Psi(t,\vec{r}) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\Psi(t,\vec{r})$$

- stationäre Lösung: $\Psi(t,\vec{r}) = \psi(\vec{r})e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$

  → zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung: $\Big( -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(\vec{r})\Big)\psi(\vec{r}) = E\,\psi(\vec{r})$

- gesucht: Kontinuumslösungen, bei denen die Welle aus dem Unendlichen kommend ins Unendliche gestreut wird.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- zeitabhängige Schrödinger-Gleichung:

  $$\Big( -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(\vec{r})\Big)\Psi(t,\vec{r}) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\Psi(t,\vec{r})$$

- stationäre Lösung: $\Psi(t,\vec{r}) = \psi(\vec{r})e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$

  → zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung: $\Big( -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(\vec{r})\Big)\psi(\vec{r}) = E\,\psi(\vec{r})$

- gesucht: Kontinuumslösungen, bei denen die Welle aus dem Unendlichen kommend ins Unendliche gestreut wird.

- räumlich lokalisiertes Potenzial: $V(\vec{r}) \stackrel{|\vec{r}|\to\infty}{\longrightarrow} 0$

  → $E > 0$ für Kontinuumslösungen

# 3.2 Die Streuamplitude



- zeitabhängige Schrödinger-Gleichung:

  $$\Big( -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(\vec{r})\Big)\Psi(t,\vec{r}) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\Psi(t,\vec{r})$$

- stationäre Lösung: $\Psi(t,\vec{r}) = \psi(\vec{r})e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$

  ➞ zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung: $\Big( -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(\vec{r})\Big)\psi(\vec{r}) = E\,\psi(\vec{r})$

- gesucht: Kontinuumslösungen, bei denen die Welle aus dem Unendlichen kommend ins Unendliche gestreut wird.

- räumlich lokalisiertes Potenzial: $V(\vec{r}) \overset{|\vec{r}|\to\infty}{\longrightarrow} 0$

  ➞ $E > 0$ für Kontinuumslösungen

- $E$ kann durch Präparation des Projektilstrahls beliebig vorgegeben werden.

  ➞ Randwertproblem zu vorgegebenem $E > 0$

- Ansatz: $\psi(\vec{r}) = \psi_{\text{einl}}(\vec{r}) + \psi_{\text{streu}}(\vec{r})$

- Ansatz: $\psi(\vec{r}) = \psi_{\text{einl}}(\vec{r}) + \psi_{\text{streu}}(\vec{r})$
- $\psi_{\text{einl}}$: Lösung in Abwesenheit des Potenzials;
  wird von der experimentellen Teilchenquelle bestimmt.

- Ansatz: $\psi(\vec{r}) = \psi_{\text{einl}}(\vec{r}) + \psi_{\text{streu}}(\vec{r})$
- $\psi_{\text{einl}}$: Lösung in Abwesenheit des Potenzials;
  wird von der experimentellen Teilchenquelle bestimmt.

  → wähle in $z$-Richtung laufende ebene Welle mit Energie $E$:

$$\psi_{\text{einl}}(\vec{r}) \propto e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{ikz}, \qquad \vec{k} = k\vec{e}_z, \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad E = \frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2\mu}$$

- Ansatz: $\psi(\vec{r}) = \psi_{\text{einl}}(\vec{r}) + \psi_{\text{streu}}(\vec{r})$
- $\psi_{\text{einl}}$: Lösung in Abwesenheit des Potenzials;

  wird von der experimentellen Teilchenquelle bestimmt.

  → wähle in $z$-Richtung laufende ebene Welle mit Energie $E$:

  $$\psi_{\text{einl}}(\vec{r}) \propto e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{ikz}, \qquad \vec{k} = k\vec{e}_z, \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad E = \frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2\mu}$$
- $\psi_{\text{streu}}$: Korrektur auf Grund des Potenzials

- Ansatz: $\psi(\vec{r}) = \psi_{\text{einl}}(\vec{r}) + \psi_{\text{streu}}(\vec{r})$
- $\psi_{\text{einl}}$: Lösung in Abwesenheit des Potenzials;

  wird von der experimentellen Teilchenquelle bestimmt.

  ➞ wähle in $z$-Richtung laufende ebene Welle mit Energie $E$:

$$\psi_{\text{einl}}(\vec{r}) \propto e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{ikz}, \qquad \vec{k} = k\vec{e}_z, \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad E = \frac{\hbar^2\vec{k}^{\,2}}{2\mu}$$

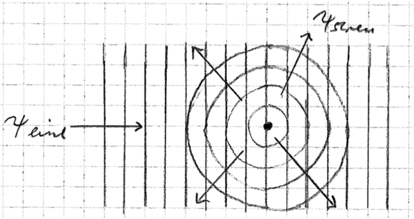
- $\psi_{\text{streu}}$: Korrektur auf Grund des Potenzials

$$V(\vec{r}) \stackrel{|\vec{r}|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi_{\text{streu}}(\vec{r}) = E\,\psi_{\text{streu}}(\vec{r}) \quad \text{für} \quad |\vec{r}| \to \infty$$

(d.h. $\psi_{\text{streu}}(\vec{r})$ ist asymptotisch eine Lösung der freien Schrödinger-Gl.)

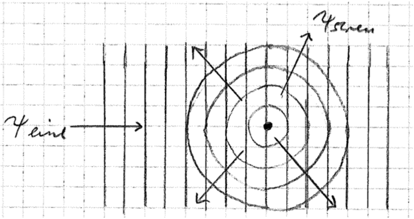
- anschaulich klar:

  $\psi_{\text{streu}}$ ist keine ebene Welle, sondern läuft asymptotisch radial aus.



- anschaulich klar:

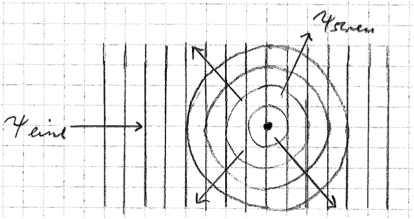
  $\psi_{\text{streu}}$ ist keine ebene Welle,
  sondern läuft asymptotisch radial
  aus.




$$\psi_{\text{streu}}(\vec{r}) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r}, \qquad r \equiv |\vec{r}|\,, \qquad f_k\text{: „Streuamplitude"}$$

- anschaulich klar:

  $\psi_{\text{streu}}$ ist keine ebene Welle, sondern läuft asymptotisch radial aus.

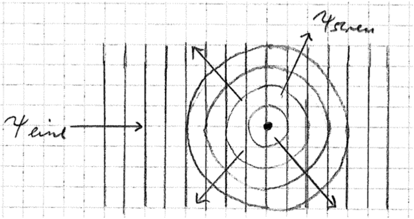



$$\psi_{\text{streu}}(\vec{r}) \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r}, \qquad r \equiv |\vec{r}|\,, \qquad f_k: \text{„Streuamplitude"}$$

$$\Rightarrow\; \nabla^2 f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r} = \Delta\, f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

- anschaulich klar:

  $\psi_{\text{streu}}$ ist keine ebene Welle, sondern läuft asymptotisch radial aus.



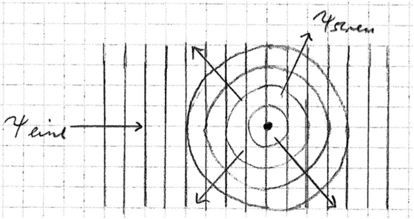

$$\psi_{\text{streu}}(\vec{r}) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r}, \qquad r \equiv |\vec{r}|\,, \qquad f_k\text{: „Streuamplitude"}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r} = \Delta\, f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r} f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r}\right] + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r}\right]$$

- anschaulich klar:

  $\psi_{\text{streu}}$ ist keine ebene Welle, sondern läuft asymptotisch radial aus.




$$\psi_{\text{streu}}(\vec{r}) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r}, \qquad r \equiv |\vec{r}|\,, \quad f_k\text{: „Streuamplitude"}$$

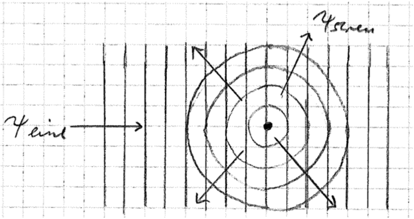
$$\Rightarrow\ \nabla^2 f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r} = \Delta\, f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r} f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r}\right] + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r}\right]$$

$$= -k^2\, f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r} \qquad + \mathcal{O}\!\left(\tfrac{1}{r^2}\right)$$

- anschaulich klar:

  $\psi_{\text{streu}}$ ist keine ebene Welle, sondern läuft asymptotisch radial aus.




$$\psi_{\text{streu}}(\vec{r}) \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r}, \qquad r \equiv |\vec{r}|\,, \qquad f_k\text{: „Streuamplitude"}$$

$$\Rightarrow\ \nabla^2 f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r} = \Delta\, f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r} f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r}\right] + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r}\right]$$

$$= -k^2\, f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r} \qquad + \mathcal{O}\!\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$\longrightarrow$ asymptotisch Lösung der freien Schrödinger-Gleichung ✓

- Asymptotik insgesamt: $\psi(\vec{r}) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}\left(e^{ikz} + f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r}\right)$
  - $\mathcal{N}$: Normierungsfaktor (fällt in der Berechnung von Wirkungsquerschnitten heraus und kann daher weggelassen werden)

- Asymptotik insgesamt: $\psi(\vec{r}) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}\left(e^{ikz} + f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r}\right)$
  - $\mathcal{N}$: Normierungsfaktor (fällt in der Berechnung von Wirkungsquerschnitten heraus und kann daher weggelassen werden)

- andere Notation für die Streuamplitude: $f_k(\theta,\varphi) \equiv f(\vec{k}\,', \vec{k})$
  - $\vec{k}$ = Wellenvektor der einlaufenden Welle $(= k\vec{e}_z)$
  - $\vec{k}\,'$ = Wellenvektor der auslaufenden Welle
    ($|\vec{k}\,'| = |\vec{k}|$ für elastische Streuung, $(\theta,\varphi) \hat{=}$ Richtung von $\vec{k}\,'$)

- Asymptotik insgesamt: $\psi(\vec{r}) \xrightarrow{r\to\infty} \mathcal{N}\left(e^{ikz} + f_k(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r}\right)$
  - $\mathcal{N}$: Normierungsfaktor (fällt in der Berechnung von Wirkungsquerschnitten heraus und kann daher weggelassen werden)
- andere Notation für die Streuamplitude: $f_k(\theta,\varphi) \equiv f(\vec{k}\,',\vec{k})$
  - $\vec{k}$ = Wellenvektor der einlaufenden Welle ($= k\vec{e}_z$)
  - $\vec{k}\,'$ = Wellenvektor der auslaufenden Welle
    ($|\vec{k}\,'| = |\vec{k}|$ für elastische Streuung, $(\theta,\varphi) \hat{=}$ Richtung von $\vec{k}\,'$)
- radialsymmetrische Potenziale (bei uns fast immer der Fall):

$$V(\vec{r}) = V(r) \quad \Rightarrow \quad f_k(\theta,\varphi) = f_k(\theta)$$

- Zusammenhang mit dem Wirkungsquerschnitt:

$$d\sigma = \frac{\vec{j}_{\text{streu}} \cdot d\vec{S}}{|\vec{j}_{\text{einl}}|} = \frac{(\vec{j}_{\text{streu}})_r \, r^2 \, d\Omega}{|\vec{j}_{\text{einl}}|} \qquad (r \to \infty)$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Zusammenhang mit dem Wirkungsquerschnitt:

$$d\sigma = \frac{\vec{j}_{\text{streu}} \cdot d\vec{S}}{|\vec{j}_{\text{einl}}|} = \frac{(\vec{j}_{\text{streu}})_r \, r^2 \, d\Omega}{|\vec{j}_{\text{einl}}|} \qquad (r \to \infty)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \lim_{r \to \infty} \frac{(\vec{j}_{\text{streu}})_r \, r^2}{|\vec{j}_{\text{einl}}|}$$

- Zusammenhang mit dem Wirkungsquerschnitt:

$$d\sigma = \frac{\vec{j}_{\text{streu}} \cdot d\vec{S}}{|\vec{j}_{\text{einl}}|} = \frac{(\vec{j}_{\text{streu}})_r \, r^2 \, d\Omega}{|\vec{j}_{\text{einl}}|} \qquad (r \to \infty)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \lim_{r\to\infty} \frac{(\vec{j}_{\text{streu}})_r \, r^2}{|\vec{j}_{\text{einl}}|}$$

- Wahrscheinlichkeitsstromdichte: $\vec{j} = \frac{\hbar k}{2\mu i} \left( \psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right)$

- Zusammenhang mit dem Wirkungsquerschnitt:

$$d\sigma = \frac{\vec{j}_{\text{streu}} \cdot d\vec{S}}{|\vec{j}_{\text{einl}}|} = \frac{(\vec{j}_{\text{streu}})_r \, r^2 \, d\Omega}{|\vec{j}_{\text{einl}}|} \qquad (r \to \infty)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \lim_{r \to \infty} \frac{(\vec{j}_{\text{streu}})_r \, r^2}{|\vec{j}_{\text{einl}}|}$$

- Wahrscheinlichkeitsstromdichte: $\vec{j} = \frac{\hbar k}{2\mu i} \left( \psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right)$
  - einlaufende Welle: $\vec{j}_{\text{einl}} = \frac{\hbar k}{\mu} \, \vec{e}_z$

- Zusammenhang mit dem Wirkungsquerschnitt:

$$d\sigma = \frac{\vec{j}_{\text{streu}} \cdot d\vec{S}}{|\vec{j}_{\text{einl}}|} = \frac{(\vec{j}_{\text{streu}})_r \, r^2 \, d\Omega}{|\vec{j}_{\text{einl}}|} \qquad (r \to \infty)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \lim_{r\to\infty} \frac{(\vec{j}_{\text{streu}})_r \, r^2}{|\vec{j}_{\text{einl}}|}$$

- Wahrscheinlichkeitsstromdichte: $\vec{j} = \frac{\hbar k}{2\mu i} \left( \psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right)$
  - einlaufende Welle: $\vec{j}_{\text{einl}} = \frac{\hbar k}{\mu} \, \vec{e}_z$
  - Streuwelle:

$$(\vec{j}_{\text{streu}})_r = \frac{\hbar k}{2\mu i} \left( \psi^*_{\text{streu}} \frac{\partial}{\partial r} \psi_{\text{streu}} - \psi_{\text{streu}} \frac{\partial}{\partial r} \psi^*_{\text{streu}} \right) \xrightarrow{r\to\infty} \frac{\hbar k}{\mu} \, |f_k|^2 \, \frac{1}{r^2}$$

- Zusammenhang mit dem Wirkungsquerschnitt:

$$d\sigma = \frac{\vec{j}_{\text{streu}} \cdot d\vec{S}}{|\vec{j}_{\text{einl}}|} = \frac{(\vec{j}_{\text{streu}})_r \, r^2 \, d\Omega}{|\vec{j}_{\text{einl}}|} \qquad (r \to \infty)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \lim_{r\to\infty} \frac{(\vec{j}_{\text{streu}})_r \, r^2}{|\vec{j}_{\text{einl}}|}$$

- Wahrscheinlichkeitsstromdichte: $\vec{j} = \frac{\hbar k}{2\mu i}\left(\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi \vec{\nabla}\psi^*\right)$
  - einlaufende Welle: $\vec{j}_{\text{einl}} = \frac{\hbar k}{\mu} \vec{e}_z$
  - Streuwelle:

$$(\vec{j}_{\text{streu}})_r = \frac{\hbar k}{2\mu i}\left(\psi^*_{\text{streu}} \frac{\partial}{\partial r}\psi_{\text{streu}} - \psi_{\text{streu}} \frac{\partial}{\partial r}\psi^*_{\text{streu}}\right) \xrightarrow{r\to\infty} \frac{\hbar k}{\mu} |f_k|^2 \frac{1}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi) = |f_k(\theta, \varphi)|^2}$$