- **1. Beispiel:** Boost entlang der x-Achse

$$\Lambda(\chi) \equiv (\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \cosh\chi & -\sinh\chi & 0 & 0 \\ -\sinh\chi & \cosh\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **1. Beispiel:** Boost entlang der x-Achse

$$\Lambda(\chi) \equiv (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \cosh\chi & -\sinh\chi & 0 & 0 \\ -\sinh\chi & \cosh\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zerlege χ in N Teilintervalle $\frac{\chi}{N}$, $N \to \infty$

$$\to \Lambda(\tfrac{\chi}{N}) \equiv (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\chi}{N} & 0 & 0 \\ -\frac{\chi}{N} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \frac{\chi}{N}\mathcal{I} \equiv (g^\mu{}_\nu) + (\Delta\omega^\mu{}_\nu)$$

mit $\mathcal{I} \equiv (\mathcal{I}^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ ($\equiv iK_x$, $\quad K_x$: Generator des Boosts)

- **1. Beispiel:** Boost entlang der x-Achse

$$\Lambda(\chi) \equiv (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \cosh\chi & -\sinh\chi & 0 & 0 \\ -\sinh\chi & \cosh\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zerlege χ in N Teilintervalle $\frac{\chi}{N}$, $N \to \infty$

$$\rightarrow \Lambda(\tfrac{\chi}{N}) \equiv (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\chi}{N} & 0 & 0 \\ -\frac{\chi}{N} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \tfrac{\chi}{N}\mathcal{I} \equiv (g^\mu{}_\nu) + (\Delta\omega^\mu{}_\nu)$$

mit $\mathcal{I} \equiv (\mathcal{I}^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ($\equiv iK_x$, K_x: Generator des Boosts)

$$\Rightarrow \Lambda(\chi) = \lim_{N\to\infty} \Lambda^N(\tfrac{\chi}{N}) = \lim_{N\to\infty} \left(\mathbb{1} + \tfrac{\chi}{N}\mathcal{I}\right)^N$$

- **1. Beispiel:** Boost entlang der x-Achse

$$\Lambda(\chi) \equiv (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \cosh\chi & -\sinh\chi & 0 & 0 \\ -\sinh\chi & \cosh\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zerlege χ in N Teilintervalle $\frac{\chi}{N}$, $N \to \infty$

$$\rightarrow \Lambda(\tfrac{\chi}{N}) \equiv (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\chi}{N} & 0 & 0 \\ -\frac{\chi}{N} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \tfrac{\chi}{N}\mathcal{I} \equiv (g^\mu{}_\nu) + (\Delta\omega^\mu{}_\nu)$$

mit $\mathcal{I} \equiv (\mathcal{I}^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(\equiv iK_x$, K_x: Generator des Boosts)

$$\Rightarrow \Lambda(\chi) = \lim_{N\to\infty} \Lambda^N(\tfrac{\chi}{N}) = \lim_{N\to\infty} \left(\mathbb{1} + \tfrac{\chi}{N}\mathcal{I}\right)^N = \exp(\chi\mathcal{I})$$

- **1. Beispiel:** Boost entlang der x-Achse

$$\Lambda(\chi) \equiv (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \cosh\chi & -\sinh\chi & 0 & 0 \\ -\sinh\chi & \cosh\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zerlege χ in N Teilintervalle $\frac{\chi}{N}$, $N \to \infty$

$$\rightarrow \Lambda(\tfrac{\chi}{N}) \equiv (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\chi}{N} & 0 & 0 \\ -\frac{\chi}{N} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \tfrac{\chi}{N}\mathcal{I} \equiv (g^\mu{}_\nu) + (\Delta\omega^\mu{}_\nu)$$

$$\text{mit } \mathcal{I} \equiv (\mathcal{I}^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\equiv iK_x, \quad K_x\text{: Generator des Boosts})$$

$$\Rightarrow \Lambda(\chi) = \lim_{N\to\infty} \Lambda^N(\tfrac{\chi}{N}) = \lim_{N\to\infty} \left(\mathbb{1} + \tfrac{\chi}{N}\mathcal{I}\right)^N = \exp(\chi\mathcal{I}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi^n}{n!}\mathcal{I}^n$$

Spinor-Transformation:

$$S(\Lambda(\chi)) = \lim_{N\to\infty} S^N\left(\Lambda(\tfrac{\chi}{N})\right)$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Spinor-Transformation:

$$S(\Lambda(\chi)) = \lim_{N\to\infty} S^N\left(\Lambda(\tfrac{\chi}{N})\right) = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{i}{4}\underbrace{\Delta\omega^{\alpha\beta}}_{\frac{\chi}{N}\mathcal{I}^{\alpha\beta}}\,\sigma_{\alpha\beta}\right)^N$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Spinor-Transformation:

$$S(\Lambda(\chi)) = \lim_{N\to\infty} S^N\left(\Lambda(\tfrac{\chi}{N})\right) = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{i}{4}\underbrace{\Delta\omega^{\alpha\beta}}_{\frac{\chi}{N}\mathcal{I}^{\alpha\beta}}\sigma_{\alpha\beta}\right)^N = \exp\left(-i\frac{\chi}{4}\mathcal{I}^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\right)$$

Spinor-Transformation:

$$S(\Lambda(\chi)) = \lim_{N\to\infty} S^N\left(\Lambda(\tfrac{\chi}{N})\right) = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \tfrac{i}{4}\underbrace{\Delta\omega^{\alpha\beta}}_{\frac{\chi}{N}\mathcal{I}^{\alpha\beta}}\sigma_{\alpha\beta}\right)^N = \exp\left(-i\tfrac{\chi}{4}\mathcal{I}^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\right)$$

$$\mathcal{I}^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} = \mathcal{I}^{01}\sigma_{01} + \mathcal{I}^{10}\sigma_{10} = 2\mathcal{I}^{01}\sigma_{01} = 2\mathcal{I}^{0}{}_{1}\sigma^{01} = -2\sigma^{01}$$

Spinor-Transformation:

$$S(\Lambda(\chi)) = \lim_{N\to\infty} S^N\left(\Lambda(\tfrac{\chi}{N})\right) = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \tfrac{i}{4}\underbrace{\Delta\omega^{\alpha\beta}}_{\frac{\chi}{N}\mathcal{I}^{\alpha\beta}}\sigma_{\alpha\beta}\right)^N = \exp\left(-i\tfrac{\chi}{4}\mathcal{I}^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\right)$$

$$\mathcal{I}^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} = \mathcal{I}^{01}\sigma_{01} + \mathcal{I}^{10}\sigma_{10} = 2\mathcal{I}^{01}\sigma_{01} = 2\mathcal{I}^{0}{}_{1}\sigma^{01} = -2\sigma^{01}$$

$$= -i\,[\gamma^0,\gamma^1] = -2i\,\gamma^0\gamma^1 = -2i\alpha^1$$

Spinor-Transformation:

$$S(\Lambda(\chi)) = \lim_{N\to\infty} S^N\left(\Lambda(\tfrac{\chi}{N})\right) = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \tfrac{i}{4}\underbrace{\Delta\omega^{\alpha\beta}}_{\frac{\chi}{N}\mathcal{I}^{\alpha\beta}}\sigma_{\alpha\beta}\right)^N = \exp\left(-i\tfrac{\chi}{4}\mathcal{I}^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\right)$$

$$\mathcal{I}^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} = \mathcal{I}^{01}\sigma_{01} + \mathcal{I}^{10}\sigma_{10} = 2\mathcal{I}^{01}\sigma_{01} = 2\mathcal{I}^{0}{}_{1}\,\sigma^{01} = -2\sigma^{01}$$

$$= -i\,[\gamma^0, \gamma^1] = -2i\,\gamma^0\gamma^1 = -2i\alpha^1$$

$$\Rightarrow\quad S(\Lambda(\chi)) = \exp\left(-\tfrac{\chi}{2}\alpha^1\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\tfrac{\chi}{2}\right)^n\left(\alpha^1\right)^n$$

Spinor-Transformation:

$$S(\Lambda(\chi)) = \lim_{N\to\infty} S^N\left(\Lambda(\tfrac{\chi}{N})\right) = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \tfrac{i}{4}\underbrace{\Delta\omega^{\alpha\beta}}_{\frac{\chi}{N}\mathcal{I}^{\alpha\beta}}\sigma_{\alpha\beta}\right)^N = \exp\left(-i\tfrac{\chi}{4}\mathcal{I}^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\right)$$

$$\mathcal{I}^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} = \mathcal{I}^{01}\sigma_{01} + \mathcal{I}^{10}\sigma_{10} = 2\mathcal{I}^{01}\sigma_{01} = 2\mathcal{I}^{0}{}_{1}\sigma^{01} = -2\sigma^{01}$$

$$= -i[\gamma^0,\gamma^1] = -2i\,\gamma^0\gamma^1 = -2i\alpha^1$$

$$\Rightarrow\ S(\Lambda(\chi)) = \exp\left(-\tfrac{\chi}{2}\alpha^1\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\tfrac{\chi}{2}\right)^n\left(\alpha^1\right)^n, \quad \alpha^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \left(\alpha^1\right)^2 = \mathbb{1}$$

Spinor-Transformation:

$$S(\Lambda(\chi)) = \lim_{N\to\infty} S^N\left(\Lambda(\tfrac{\chi}{N})\right) = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \tfrac{i}{4}\underbrace{\Delta\omega^{\alpha\beta}}_{\frac{\chi}{N}\mathcal{I}^{\alpha\beta}}\sigma_{\alpha\beta}\right)^N = \exp\left(-i\tfrac{\chi}{4}\mathcal{I}^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\right)$$

$$\mathcal{I}^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} = \mathcal{I}^{01}\sigma_{01} + \mathcal{I}^{10}\sigma_{10} = 2\mathcal{I}^{01}\sigma_{01} = 2\mathcal{I}^{0}{}_{1}\,\sigma^{01} = -2\sigma^{01}$$

$$= -i\,[\gamma^0,\gamma^1] = -2i\,\gamma^0\gamma^1 = -2i\alpha^1$$

$$\Rightarrow\ S(\Lambda(\chi)) = \exp\left(-\tfrac{\chi}{2}\alpha^1\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\tfrac{\chi}{2}\right)^n\left(\alpha^1\right)^n, \quad \alpha^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\alpha^1\right)^2 = \mathbb{1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(-\tfrac{\chi}{2}\right)^{2n}\mathbb{1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\left(-\tfrac{\chi}{2}\right)^{2n+1}\alpha^1$$

Spinor-Transformation:

$$S(\Lambda(\chi)) = \lim_{N\to\infty} S^N\left(\Lambda(\tfrac{\chi}{N})\right) = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{i}{4}\underbrace{\Delta\omega^{\alpha\beta}}_{\frac{\chi}{N}\mathcal{I}^{\alpha\beta}}\sigma_{\alpha\beta}\right)^N = \exp\left(-i\frac{\chi}{4}\mathcal{I}^{\alpha\beta}\,\sigma_{\alpha\beta}\right)$$

$$\mathcal{I}^{\alpha\beta}\,\sigma_{\alpha\beta} = \mathcal{I}^{01}\,\sigma_{01} + \mathcal{I}^{10}\,\sigma_{10} = 2\mathcal{I}^{01}\,\sigma_{01} = 2\mathcal{I}^{0}{}_{1}\,\sigma^{01} = -2\sigma^{01}$$

$$= -i\,[\gamma^0,\gamma^1] = -2i\,\gamma^0\gamma^1 = -2i\alpha^1$$

$$\Rightarrow\; S(\Lambda(\chi)) = \exp\left(-\frac{\chi}{2}\alpha^1\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{\chi}{2}\right)^n\left(\alpha^1\right)^n, \quad \alpha^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\alpha^1\right)^2 = \mathbb{1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(-\frac{\chi}{2}\right)^{2n}\mathbb{1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\left(-\frac{\chi}{2}\right)^{2n+1}\alpha^1$$

$$= \cosh\left(\frac{\chi}{2}\right)\mathbb{1} - \sinh\left(\frac{\chi}{2}\right)\alpha^1$$

Spinor-Transformation:

$$S(\Lambda(\chi)) = \lim_{N\to\infty} S^N\left(\Lambda(\tfrac{\chi}{N})\right) = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \tfrac{i}{4}\underbrace{\Delta\omega^{\alpha\beta}}_{\frac{\chi}{N}\mathcal{I}^{\alpha\beta}}\sigma_{\alpha\beta}\right)^N = \exp\left(-i\tfrac{\chi}{4}\mathcal{I}^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\right)$$

$$\mathcal{I}^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} = \mathcal{I}^{01}\sigma_{01} + \mathcal{I}^{10}\sigma_{10} = 2\mathcal{I}^{01}\sigma_{01} = 2\mathcal{I}^{0}{}_{1}\sigma^{01} = -2\sigma^{01}$$

$$= -i[\gamma^0, \gamma^1] = -2i\,\gamma^0\gamma^1 = -2i\alpha^1$$

$$\Rightarrow\ S(\Lambda(\chi)) = \exp\left(-\tfrac{\chi}{2}\alpha^1\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\tfrac{\chi}{2}\right)^n\left(\alpha^1\right)^n, \quad \alpha^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\alpha^1\right)^2 = \mathbb{1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(-\tfrac{\chi}{2}\right)^{2n}\mathbb{1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\left(-\tfrac{\chi}{2}\right)^{2n+1}\alpha^1$$

$$= \cosh\left(\tfrac{\chi}{2}\right)\mathbb{1} - \sinh\left(\tfrac{\chi}{2}\right)\alpha^1 = \begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{\chi}{2}\right) & -\sinh\left(\frac{\chi}{2}\right)\sigma^1 \\ -\sinh\left(\frac{\chi}{2}\right)\sigma^1 & \cosh\left(\frac{\chi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

- <u>2. Beispiel:</u> Drehung um die z-Achse

$$\Lambda(\varphi) \equiv (\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(passive Transformation, d.h. Drehung des Koordinatensystems um φ)

- **2. Beispiel:** Drehung um die z-Achse

$$\Lambda(\varphi) \equiv (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(passive Transformation, d.h. Drehung des Koordinatensystems um φ)

analoges Vorgehen $\rightarrow$ $S(\Lambda(\varphi)) = \exp\left(i\frac{\varphi}{2}\sigma^{12}\right) = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\ \sigma^{12}$

$$\sigma^{12} = \frac{i}{2}[\gamma^1, \gamma^2] = i\gamma^1\gamma^2 = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \equiv \Sigma^3$$

- 2. Beispiel: Drehung um die z-Achse

$$\Lambda(\varphi) \equiv (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(passive Transformation, d.h. Drehung des Koordinatensystems um φ)

analoges Vorgehen $\longrightarrow$ $S(\Lambda(\varphi)) = \exp\left(\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}\sigma^{12}\right) = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\ \sigma^{12}$

$$\sigma^{12} = \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^1, \gamma^2] = \mathrm{i}\gamma^1\gamma^2 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \equiv \Sigma^3$$

- interesante Eigenschaft: $\varphi = 2\pi \ \Rightarrow\ S = -\mathbb{1} \ \Rightarrow\ \psi' = -\psi$

  $\varphi = 4\pi \ \Rightarrow\ S = +\mathbb{1} \ \Rightarrow\ \psi' = \psi$

  - hängt mit Spin-$\frac{1}{2}$ zusammen
  - Observable: bilinear in ψ (z.B. $j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$) $\Rightarrow$ Vorzeichen fällt heraus

- Drehung um eine beliebige Achse:

$$S = \exp\left(\mathrm{i}\frac{\vec{\varphi}}{2}\cdot\vec{\Sigma}\right) = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\,\vec{\Sigma}\cdot\frac{\vec{\varphi}}{\varphi}$$

  - $\varphi = |\vec{\varphi}|$ = Drehwinkel, $\frac{\vec{\varphi}}{\varphi}$ = Richtung der Drehachse
  - $\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$

- Drehung um eine beliebige Achse:

$$S = \exp\left(\mathrm{i}\frac{\vec{\varphi}}{2}\cdot\vec{\Sigma}\right) = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\,\vec{\Sigma}\cdot\frac{\vec{\varphi}}{\varphi}$$

  - $\varphi = |\vec{\varphi}|$ = Drehwinkel, $\frac{\vec{\varphi}}{\varphi}$ = Richtung der Drehachse
  - $\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$

- weitere Eigenschaften von S:
  - Rotationen: $S^\dagger = S^{-1}$ (unitär)
  - Boosts: $S^\dagger = S$ (hermitesch)
  - beides: $\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = S^{-1}$

$$\Rightarrow \quad \overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0 \;\rightarrow\; (S\psi)^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger S^\dagger\gamma^0 = \overline{\psi}\gamma^0 S^\dagger\gamma^0 = \overline{\psi}S^{-1}$$

2.12 Spin

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2.12 Spin

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- bisherige Perspektive: passive Transformationen

  Der selbe physikalische Prozess wird in zwei Inertialsystemen K und K' beschrieben, die durch eine Lorentz-Transformation in einander überführt werden können.

  $\mathrm{K} \to \mathrm{K'} \quad \boldsymbol{\rightarrow} \quad x \to x' = \Lambda x \,, \quad \psi(x) \to \psi'(x') = S\psi(x)$

2.12 Spin

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- bisherige Perspektive: passive Transformationen

  Der selbe physikalische Prozess wird in zwei Inertialsystemen K und K' beschrieben, die durch eine Lorentz-Transformation in einander überführt werden können.

  K $\to$ K' $\quad \rightarrow \quad x \to x' = \Lambda x\,, \quad \psi(x) \to \psi'(x') = S\psi(x)$

- äquivalent: aktive Transformationen

  = Transformation des physikalischen Systems in umgekehrter Richtung

  z.B. Drehung des physikalischen Systems im Uhrzeigersinn
  $\hat{=}$ Drehung des Koordinatensystems gegen den Uhrzeigersinn

Seien im Folgenden:

- $\psi(x)$: ursprünglicher Spinor beschrieben in K
- $\tilde{\psi}(x)$: aktiv gedrehter Spinor beschrieben in K
- K' ein Koordinatensystem, das mitgedreht wurde

Seien im Folgenden:

- $\psi(x)$: ursprünglicher Spinor beschrieben in K
- $\tilde{\psi}(x)$: aktiv gedrehter Spinor beschrieben in K
- K' ein Koordinatensystem, das mitgedreht wurde

$\Rightarrow$ $\tilde{\psi}$ sieht in K' genauso aus wie ψ in K:

$$\tilde{\psi}'(x') = \psi(x') \quad \text{(gleiches Argument auf beiden Seiten!)}$$

Seien im Folgenden:

- $\psi(x)$: ursprünglicher Spinor beschrieben in K
- $\tilde{\psi}(x)$: aktiv gedrehter Spinor beschrieben in K
- K' ein Koordinatensystem, das mitgedreht wurde

$\Rightarrow$ $\tilde{\psi}$ sieht in K' genauso aus wie ψ in K:

$$\underset{\displaystyle S\tilde{\psi}(x)}{\underset{\shortparallel}{\tilde{\psi}'(x')}} = \underset{\displaystyle \psi(\Lambda x)}{\underset{\shortparallel}{\psi(x')}} \qquad \text{(gleiches Argument auf beiden Seiten!)}$$

Seien im Folgenden:

- $\psi(x)$: ursprünglicher Spinor beschrieben in K
- $\tilde{\psi}(x)$: aktiv gedrehter Spinor beschrieben in K
- K' ein Koordinatensystem, das mitgedreht wurde

$\Rightarrow$ $\tilde{\psi}$ sieht in K' genauso aus wie ψ in K:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\psi}'(x') & = & \psi(x') \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ S\tilde{\psi}(x) & & \psi(\Lambda x) \end{array}$$

(gleiches Argument auf beiden Seiten!)

$\Rightarrow$ $\tilde{\psi}(x) = S^{-1}\psi(\Lambda x)$

mit den Matrizen S und Λ der passiven Transformationen

- $\tilde{\psi}(x) = S^{-1}\psi(\Lambda x)$

- $\tilde{\psi}(x) = S^{-1}\psi(\Lambda x)$

- infinitesimale Transformationen:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu + \Delta\omega^\mu{}_\nu \quad \Rightarrow \quad \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = x^\mu + \Delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu$$

$$S = 1 - \tfrac{i}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad S^{-1} = 1 + \tfrac{i}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}$$

- $\tilde{\psi}(x) = S^{-1}\psi(\Lambda x)$
- infinitesimale Transformationen:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu}{}_{\nu} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu} \quad \Rightarrow \quad \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} = x^{\mu} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$$

$$S = 1 - \frac{i}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad S^{-1} = 1 + \frac{i}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \quad \psi(\Lambda x) = \psi\Big((x^{\mu} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu})\Big)$$

- $\tilde{\psi}(x) = S^{-1}\psi(\Lambda x)$
- infinitesimale Transformationen:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu + \Delta\omega^\mu{}_\nu \qquad \Rightarrow \qquad \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = x^\mu + \Delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu$$

$$S = 1 - \tfrac{\mathrm{i}}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \qquad \Rightarrow \qquad S^{-1} = 1 + \tfrac{\mathrm{i}}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \quad \psi(\Lambda x) = \psi\big((x^\mu + \Delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu)\big)$$
$$= \psi(x) + \big(\partial_\mu\psi(x)\big)\cdot\Delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu \;=\; \big(1 + \Delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu\partial_\mu\big)\,\psi(x)$$

- $\tilde{\psi}(x) = S^{-1}\psi(\Lambda x)$

- infinitesimale Transformationen:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu + \Delta\omega^\mu{}_\nu \quad \Rightarrow \quad \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = x^\mu + \Delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu$$

$$S = 1 - \tfrac{i}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad S^{-1} = 1 + \tfrac{i}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \quad \psi(\Lambda x) = \psi\big((x^\mu + \Delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu)\big)$$
$$= \psi(x) + \big(\partial_\mu\psi(x)\big)\cdot\Delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu = \big(1 + \Delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu\partial_\mu\big)\,\psi(x)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\psi}(x) = \left[1 + \Delta\omega^{\mu\nu}(x_\nu\partial_\mu + \tfrac{i}{4}\sigma_{\mu\nu})\right]\psi(x)$$

- $\tilde{\psi}(x) = S^{-1}\psi(\Lambda x)$

- infinitesimale Transformationen:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu}{}_{\nu} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu} \qquad \Rightarrow \qquad \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} = x^{\mu} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$$

$$S = 1 - \tfrac{i}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \qquad \Rightarrow \qquad S^{-1} = 1 + \tfrac{i}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \quad \psi(\Lambda x) = \psi\big((x^{\mu} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu})\big)$$

$$= \psi(x) + \big(\partial_{\mu}\psi(x)\big) \cdot \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \;=\; \big(1 + \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}\partial_{\mu}\big)\,\psi(x)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\psi}(x) = \big[1 + \Delta\omega^{\mu\nu}(x_{\nu}\partial_{\mu} + \tfrac{i}{4}\sigma_{\mu\nu})\big]\,\psi(x)$$

von Λ ➞ auch für Skalarfelder   von S^{-1} ➞ spezifisch für Dirac-Spinoren

- inifinitesimale Drehung um die z-Achse: $\Delta\omega^{12} = -\Delta\omega^{21} = -\delta\varphi$

$$\Rightarrow \; \tilde{\psi}(x) = \left[1 - \delta\varphi(x_2\partial_1 - x_1\partial_2 + \tfrac{i}{2}\sigma_{12})\right]\psi(x)$$

- inifinitesimale Drehung um die z-Achse: $\Delta\omega^{12} = -\Delta\omega^{21} = -\delta\varphi$

$$\Rightarrow \tilde{\psi}(x) = \left[1 - \delta\varphi(x_2\partial_1 - x_1\partial_2 + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sigma_{12})\right]\psi(x)$$

$$= \left[1 - \tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta\varphi\left(x^1\,\tfrac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\tfrac{\partial}{\partial x^2} - x^2\,\tfrac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\tfrac{\partial}{\partial x^1} + \tfrac{\hbar}{2}\,\Sigma^3\right)\right]\psi(x)$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- inifinitesimale Drehung um die *z*-Achse: $\Delta\omega^{12} = -\Delta\omega^{21} = -\delta\varphi$

$$\Rightarrow \tilde{\psi}(x) = \left[1 - \delta\varphi(x_2\partial_1 - x_1\partial_2 + \tfrac{i}{2}\sigma_{12})\right]\psi(x)$$

$$= \left[1 - \tfrac{i}{\hbar}\delta\varphi\left(x^1\tfrac{\hbar}{i}\tfrac{\partial}{\partial x^2} - x^2\tfrac{\hbar}{i}\tfrac{\partial}{\partial x^1} + \tfrac{\hbar}{2}\Sigma^3\right)\right]\psi(x)$$

$$= \left[1 - \tfrac{i}{\hbar}\delta\varphi\, J^3\right]\psi(x)$$

mit

$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$	Gesamtdrehimpuls
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$	Bahndrehimpuls
$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\end{pmatrix}$	Spin

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- inifinitesimale Drehung um die z-Achse: $\Delta\omega^{12} = -\Delta\omega^{21} = -\delta\varphi$

$$\Rightarrow \tilde{\psi}(x) = \left[1 - \delta\varphi(x_2\partial_1 - x_1\partial_2 + \tfrac{i}{2}\sigma_{12})\right]\psi(x)$$

$$= \left[1 - \tfrac{i}{\hbar}\delta\varphi\left(x^1\tfrac{\hbar}{i}\tfrac{\partial}{\partial x^2} - x^2\tfrac{\hbar}{i}\tfrac{\partial}{\partial x^1} + \tfrac{\hbar}{2}\Sigma^3\right)\right]\psi(x)$$

$$= \left[1 - \tfrac{i}{\hbar}\delta\varphi\, J^3\right]\psi(x)$$

mit

$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$	Gesamtdrehimpuls
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$	Bahndrehimpuls
$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\end{pmatrix}$	Spin

- endliche Drehung um eine belibige Achse: $\boxed{\tilde{\psi}(x) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{\varphi}\cdot\vec{J}\right)\psi(x)}$

Gesamtdrehimpuls: weitere Eigenschaften

- $[H_\mathrm{D}, \vec{J}] = 0 \quad \Rightarrow$ Erhaltungsgröße, gemeinsame Eigenzustände

  (gilt auch mit radialsymmetrischen Potenzial)

  dagegen: $\quad [H_\mathrm{D}, \vec{L}] = -[H_\mathrm{D}, \vec{S}] \neq 0$

Gesamtdrehimpuls: weitere Eigenschaften

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $[H_D, \vec{J}] = 0 \quad \Rightarrow$ Erhaltungsgröße, gemeinsame Eigenzustände

  (gilt auch mit radialsymmetrischen Potenzial)

  dagegen: $[H_D, \vec{L}] = -[H_D, \vec{S}] \neq 0$

- $[J^i, J^j] = i\hbar\epsilon^{ijk} J^k, \quad [L^i, L^j] = i\hbar\epsilon^{ijk} L^k, \quad [S^i, S^j] = i\hbar\epsilon^{ijk} S^k$

Gesamtdrehimpuls: weitere Eigenschaften

- $[H_D, \vec{J}] = 0 \quad \Rightarrow$ Erhaltungsgröße, gemeinsame Eigenzustände

  (gilt auch mit radialsymmetrischen Potenzial)

  dagegen: $\quad [H_D, \vec{L}] = -[H_D, \vec{S}] \neq 0$

- $[J^i, J^j] = i\hbar\epsilon^{ijk}\, J^k, \quad [L^i, L^j] = i\hbar\epsilon^{ijk}\, L^k, \quad [S^i, S^j] = i\hbar\epsilon^{ijk}\, S^k$

- H_D, $\vec{L}^{\,2}$, $\vec{S}^{\,2}$, $\vec{J}^{\,2}$ und J^k vertauschen miteinander

  → gemeinsame Eigenzustände: $\quad |E, \ell, s = \frac{1}{2}, j, m_j\rangle$ (aber nicht m_ℓ, m_s)

Helizität

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Helizitätsoperator: $\hat{h} = \vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$
  - $\vec{p} \equiv \frac{\hbar}{\mathrm{i}}$ = Impulsoperator,
    $|\vec{p}|$ kann man über Impulseigenzustände definieren

Helizität

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Helizitätsoperator: $\hat{h} = \vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$
  - $\vec{p} \equiv \frac{\hbar}{\mathrm{i}}$ = Impulsoperator,
    $|\vec{p}|$ kann man über Impulseigenzustände definieren
- $[H_\mathrm{D}, \hat{h}] = 0 \;\rightarrow$ gemeinsame Eigenzustände

  aber: $[H_\mathrm{D}, \vec{\Sigma} \cdot \vec{n}] \neq 0$, wenn $\vec{n}$ nicht parallel zu $\vec{p}$ ist.

Helizität

- Helizitätsoperator: $\hat{h} = \vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$
  - $\vec{p} \equiv \frac{\hbar}{\mathrm{i}}$ = Impulsoperator,
    $|\vec{p}|$ kann man über Impulseigenzustände definieren
- $[H_D, \hat{h}] = 0 \quad \rightarrow$ gemeinsame Eigenzustände

  aber: $[H_D, \vec{\Sigma} \cdot \vec{n}] \neq 0$, wenn $\vec{n}$ nicht parallel zu $\vec{p}$ ist.
- $\hat{h}^2 = \mathbb{1} \quad \Rightarrow$ Eigenwerte von $\hat{h}$: ± 1
  - rechtshändige Spinoren: $\hat{h}\psi = +\psi$ (Impuls und Spin parallel)
  - linkshändige Spinoren: $\hat{h}\psi = -\psi$ (Impuls und Spin antiparallel)

2.13 Diskrete Symmetrietransformationen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2.13 Diskrete Symmetrietransformationen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Raumspiegelung (Paritätstransformation)

- Koordinaten: $(x'^{\,\mu}) = \begin{pmatrix} ct' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -\vec{x} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2.13 Diskrete Symmetrietransformationen

1. Raumspiegelung (Paritätstransformation)

- Koordinaten: $(x'^{\,\mu}) = \begin{pmatrix} ct' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -\vec{x} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Spinortransformation: $\psi'(x') = S(\Lambda)\,\psi(x) \equiv P\psi(x)$, $\quad P:$ Paritätsoperator

2.13 Diskrete Symmetrietransformationen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Raumspiegelung (Paritätstransformation)

- Koordinaten: $(x'^{\,\mu}) = \begin{pmatrix} ct' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -\vec{x} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- Spinortransformation: $\psi'(x') = S(\Lambda)\,\psi(x) \equiv P\psi(x), \quad P:$ Paritätsoperator

  Wir haben allgemein gezeigt: $S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\nu}S(\Lambda) = \Lambda^{\nu}{}_{\mu}\gamma^{\mu}$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} P^{-1}\gamma^0 P &=& \gamma^0 \\ P^{-1}\gamma^k P &=& -\gamma^k \end{array}\right\}$$

2.13 Diskrete Symmetrietransformationen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Raumspiegelung (Paritätstransformation)

- Koordinaten: $(x'^{\,\mu}) = \begin{pmatrix} ct' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -\vec{x} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- Spinortransformation: $\psi'(x') = S(\Lambda)\,\psi(x) \equiv P\psi(x), \quad P:$ Paritätsoperator

  Wir haben allgemein gezeigt: $S^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu S(\Lambda) = \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} P^{-1}\gamma^0 P &= \gamma^0 \\ P^{-1}\gamma^k P &= -\gamma^k \end{aligned}\right\} \quad \longrightarrow \quad P = \eta_P \gamma^0, \quad \eta_P = const.$$

2.13 Diskrete Symmetrietransformationen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Raumspiegelung (Paritätstransformation)

- **Koordinaten:** $(x'^{\,\mu}) = \begin{pmatrix} ct' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -\vec{x} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- **Spinortransformation:** $\psi'(x') = S(\Lambda)\,\psi(x) \equiv P\psi(x), \quad P:$ Paritätsoperator

  Wir haben allgemein gezeigt: $S^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu S(\Lambda) = \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} P^{-1}\gamma^0 P &= \gamma^0 \\ P^{-1}\gamma^k P &= -\gamma^k \end{aligned}\right\} \quad \longrightarrow \quad P = \eta_P \gamma^0, \quad \eta_P = const.$$

  Wahrscheinlichkeitserhaltung:

$$\psi'^\dagger(x')\psi'(x') \stackrel{!}{=} \psi^\dagger(x)\psi(x) \quad \Rightarrow \quad P^\dagger P = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad \eta_P = e^{i\varphi} \quad \Rightarrow \quad P = e^{i\varphi}\gamma^0$$

2.13 Diskrete Symmetrietransformationen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Raumspiegelung (Paritätstransformation)

- Koordinaten: $(x'^{\,\mu}) = \begin{pmatrix} ct' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -\vec{x} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- Spinortransformation: $\psi'(x') = S(\Lambda)\,\psi(x) \equiv P\psi(x), \quad P:$ Paritätsoperator

  Wir haben allgemein gezeigt: $S^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu S(\Lambda) = \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu$

  $$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} P^{-1}\gamma^0 P & = & \gamma^0 \\ P^{-1}\gamma^k P & = & -\gamma^k \end{array}\right\} \quad \longrightarrow \quad P = \eta_P \gamma^0, \quad \eta_P = const.$$

  Wahrscheinlichkeitserhaltung:

  $$\psi'^{\dagger}(x')\psi'(x') \stackrel{!}{=} \psi^\dagger(x)\psi(x) \quad \Rightarrow \quad P^\dagger P = 1\!\!1 \quad \Rightarrow \quad \eta_P = e^{i\varphi} \quad \Rightarrow \quad P = e^{i\varphi}\gamma^0$$

  Die Phase φ ist nicht beobachtbar. $\longrightarrow$ Wähle $\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = \gamma^0}$

- $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1\!\!1 & 0 \\ 0 & -1\!\!1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ umgekehrtes Vorzeichen bei der Transformation von Lösungen positiver und negativer Energie:

$$P\psi^{(+)}_{p,s}(x) = +\psi^{(+)}_{p',s}(x'), \quad P\psi^{(-)}_{p,s}(x) = -\psi^{(-)}_{p',s}(x'), \quad p' = \begin{pmatrix} E/c \\ -\vec{p} \end{pmatrix}$$

Teilchen und Antiteilchen besitzen entgegengesetzte „intrinsische Parität“

- $\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ umgekehrtes Vorzeichen bei der Transformation von Lösungen positiver und negativer Energie:

$$P\psi^{(+)}_{p,s}(x) = +\psi^{(+)}_{p',s}(x'), \quad P\psi^{(-)}_{p,s}(x) = -\psi^{(-)}_{p',s}(x'), \quad p' = \begin{pmatrix} E/c \\ -\vec{p} \end{pmatrix}$$

Teilchen und Antiteilchen besitzen entgegengesetzte „intrinsische Parität"

- In wechselwirkenden Theorien mit mehreren Teilchensorten sind die relativen Phasen i.A. nicht frei wählbar.

- Erinnerung:

  $\det \Lambda = +1$ für eigentliche orthochrone Lorentz-Transformationen

  $\det \Lambda = -1$ für Raumspiegelungen

- Erinnerung:

  $\det \Lambda = +1$ für eigentliche orthochrone Lorentz-Transformationen

  $\det \Lambda = -1$ für Raumspiegelungen

- wichtige Definition: $\gamma_5 = \gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

  Eigenschaft: $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$ für alle $\mu = 0, \ldots, 3$

- Erinnerung:

  $\det \Lambda = +1$ für eigentliche orthochrone Lorentz-Transformationen

  $\det \Lambda = -1$ für Raumspiegelungen

- wichtige Definition: $\gamma_5 = \gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

  Eigenschaft: $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$ für alle $\mu = 0, \dots, 3$

- Unter Benutzung der γ-Matrizen lassen sich aus $\overline{\psi}$ und ψ Bilinearformen mit unterschiedlichem wohldefinierten Transformationsverhalten konstruieren:

  „kovariante Bilineare"

Kovariante Bilineare

$S(x) \equiv \overline{\psi}(x)\psi(x)$	$S'(x') = S(x)$	Skalar
$P(x) \equiv \overline{\psi}(x) i\gamma_5 \psi(x)$	$P'(x') = \det\Lambda \, P(x)$	Pseudoskalar
$V^\mu(x) \equiv \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$	$V'^{\,\mu}(x') = \Lambda^\mu{}_\nu \, V^\nu(x)$	Vektor
$A^\mu(x) \equiv \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)$	$A'^{\,\mu}(x') = \det\Lambda \, \Lambda^\mu{}_\nu \, A^\nu(x)$	Axialvektor
$T^{\mu\nu}(x) \equiv \overline{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$	$T'^{\,\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \, T^{\rho\sigma}(x)$	Tensor 2. Stufe

(Beweis: Übung)

Kovariante Bilineare

$S(x) \equiv \overline{\psi}(x)\psi(x)$	$S'(x') = S(x)$	Skalar
$P(x) \equiv \overline{\psi}(x) i\gamma_5\psi(x)$	$P'(x') = \det\Lambda\, P(x)$	Pseudoskalar
$V^\mu(x) \equiv \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$	$V'^{\,\mu}(x') = \Lambda^\mu{}_\nu\, V^\nu(x)$	Vektor
$A^\mu(x) \equiv \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)$	$A'^{\,\mu}(x') = \det\Lambda\,\Lambda^\mu{}_\nu\, A^\nu(x)$	Axialvektor
$T^{\mu\nu}(x) \equiv \overline{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$	$T'^{\,\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\, T^{\rho\sigma}(x)$	Tensor 2. Stufe

(Beweis: Übung)

- Die obigen Bilinearformen sind hermitesch.

Kovariante Bilineare

$S(x) \equiv \overline{\psi}(x)\psi(x)$	$S'(x') = S(x)$	Skalar
$P(x) \equiv \overline{\psi}(x)i\gamma_5\psi(x)$	$P'(x') = \det\Lambda\, P(x)$	Pseudoskalar
$V^\mu(x) \equiv \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$	$V'^{\,\mu}(x') = \Lambda^\mu{}_\nu\, V^\nu(x)$	Vektor
$A^\mu(x) \equiv \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)$	$A'^{\,\mu}(x') = \det\Lambda\,\Lambda^\mu{}_\nu\, A^\nu(x)$	Axialvektor
$T^{\mu\nu}(x) \equiv \overline{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$	$T'^{\,\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\, T^{\rho\sigma}(x)$	Tensor 2. Stufe

(Beweis: Übung)

- Die obigen Bilinearformen sind hermitesch.
- $\{\mathbb{1}, i\gamma_5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma_5, \sigma^{\mu\nu}\}$: 16 linear unabhängige 4×4-Matrizen
  $1 + 1 + 4 + 4 + 6 = 16$

Kovariante Bilineare

$S(x) \equiv \overline{\psi}(x)\psi(x)$	$S'(x') = S(x)$	Skalar
$P(x) \equiv \overline{\psi}(x) i\gamma_5 \psi(x)$	$P'(x') = \det\Lambda\, P(x)$	Pseudoskalar
$V^\mu(x) \equiv \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$	$V'^{\,\mu}(x') = \Lambda^\mu{}_\nu\, V^\nu(x)$	Vektor
$A^\mu(x) \equiv \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)$	$A'^{\,\mu}(x') = \det\Lambda\,\Lambda^\mu{}_\nu\, A^\nu(x)$	Axialvektor
$T^{\mu\nu}(x) \equiv \overline{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$	$T'^{\,\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\, T^{\rho\sigma}(x)$	Tensor 2. Stufe

(Beweis: Übung)

- Die obigen Bilinearformen sind hermitesch.
- $\{\mathbb{1}, i\gamma_5,\ \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma_5, \sigma^{\mu\nu}\}$: 16 linear unabhängige 4×4-Matrizen

  $1 + 1 + 4\ +\ 4\ +\ 6\ = 16$

  $\longrightarrow$ vollständige Basis für beliebige 4×4-Matrizen