2.9 Nichtrelativistischer Grenzfall der freien Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2.9 Nichtrelativistischer Grenzfall der freien Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Dirac-Gleichung in nicht-kovarianter Form: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(\frac{\hbar c}{i}\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta mc^2\right)\psi$

2.9 Nichtrelativistischer Grenzfall der freien Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Dirac-Gleichung in nicht-kovarianter Form: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left(\frac{\hbar c}{i} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m c^2 \right) \psi$
- Lösungen positiver Energie mit $\vec{p} = \vec{0}$: $\psi = u_s(\vec{p} = \vec{0})\, e^{-\frac{i}{\hbar} m c^2 t}$

2.9 Nichtrelativistischer Grenzfall der freien Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Dirac-Gleichung in nicht-kovarianter Form: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(\frac{\hbar c}{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta mc^2\right)\psi$
- Lösungen positiver Energie mit $\vec{p} = \vec{0}$: $\psi = u_s(\vec{p} = \vec{0})\, e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}$
- kleine nichtverschwindende Impulse: $\vec{p}^{\,2} \ll m^2c^2$

$$\Rightarrow \quad E - mc^2 \approx \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} \ll mc^2$$

2.9 Nichtrelativistischer Grenzfall der freien Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Dirac-Gleichung in nicht-kovarianter Form: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(\frac{\hbar c}{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta mc^2\right)\psi$

- Lösungen positiver Energie mit $\vec{p} = \vec{0}$: $\psi = u_s(\vec{p} = \vec{0})\, e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}$

- kleine nichtverschwindende Impulse: $\vec{p}^{\,2} \ll m^2c^2$

  $\Rightarrow \quad E - mc^2 \approx \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} \ll mc^2 \quad \rightarrow$ Ansatz: $\psi(t,\vec{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}\begin{pmatrix}\varphi(t,\vec{r})\\ \chi(t,\vec{r})\end{pmatrix}$

  - φ, χ: zweikomponentige Spinoren, die im Vergleich zu $e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}$ nur langsam mit der Zeit variieren:

    $$|i\hbar\tfrac{\partial}{\partial t}\varphi| \ll |mc^2\,\varphi|\,, \qquad |i\hbar\tfrac{\partial}{\partial t}\chi| \ll |mc^2\,\chi|$$

$$\psi(t,\vec{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}\begin{pmatrix}\varphi(t,\vec{r})\\ \chi(t,\vec{r})\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi = \begin{pmatrix} mc^2\varphi + i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}\\ mc^2\chi + i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t}\end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}$$

$$\psi(t,\vec{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t} \begin{pmatrix} \varphi(t,\vec{r}) \\ \chi(t,\vec{r}) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi = \begin{pmatrix} mc^2\varphi + i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} \\ mc^2\chi + i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}$$

$$\stackrel{!}{=} \left(\frac{\hbar c}{i}\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta mc^2\right)\psi$$

$$\psi(t,\vec{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}\begin{pmatrix}\varphi(t,\vec{r})\\ \chi(t,\vec{r})\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi = \begin{pmatrix} mc^2\varphi + i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}\\ mc^2\chi + i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t}\end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}$$

$$\overset{!}{=} \quad \left(\frac{\hbar c}{i}\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta mc^2\right)\psi = \left[\frac{\hbar c}{i}\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\\ \vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla} & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc^2 & 0\\ 0 & -mc^2\end{pmatrix}\right]\psi$$

$$\psi(t,\vec{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}\begin{pmatrix}\varphi(t,\vec{r})\\ \chi(t,\vec{r})\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi = \begin{pmatrix} mc^2\varphi + i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}\\ mc^2\chi + i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t}\end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}$$

$$\stackrel{!}{=} \left(\frac{\hbar c}{i}\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta mc^2\right)\psi = \left[\frac{\hbar c}{i}\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\\ \vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla} & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc^2 & 0\\ 0 & -mc^2\end{pmatrix}\right]\psi$$

$$= \begin{pmatrix} mc^2\varphi + \frac{\hbar c}{i}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\chi\\ -mc^2\chi + \frac{\hbar c}{i}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\varphi\end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}$$

$$\psi(t,\vec{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}\begin{pmatrix}\varphi(t,\vec{r})\\ \chi(t,\vec{r})\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi = \begin{pmatrix} mc^2\varphi + i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}\\ mc^2\chi + i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t}\end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}$$

$$\stackrel{!}{=} \quad \left(\frac{\hbar c}{i}\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta mc^2\right)\psi = \left[\frac{\hbar c}{i}\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\\ \vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla} & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc^2 & 0\\ 0 & -mc^2\end{pmatrix}\right]\psi$$

$$= \begin{pmatrix} mc^2\varphi + \frac{\hbar c}{i}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\chi\\ -mc^2\chi + \frac{\hbar c}{i}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\varphi\end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}$$

$$\Rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\chi$$

$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\varphi - 2mc^2\chi$$

$$\psi(t,\vec{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}\begin{pmatrix}\varphi(t,\vec{r})\\ \chi(t,\vec{r})\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi = \begin{pmatrix} mc^2\varphi + i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}\\ mc^2\chi + i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t}\end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}$$

$$\stackrel{!}{=} \quad \left(\frac{\hbar c}{i}\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta mc^2\right)\psi = \left[\frac{\hbar c}{i}\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\\ \vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla} & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc^2 & 0\\ 0 & -mc^2\end{pmatrix}\right]\psi$$

$$= \begin{pmatrix} mc^2\varphi + \frac{\hbar c}{i}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\chi\\ -mc^2\chi + \frac{\hbar c}{i}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\varphi\end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}$$

$$\Rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\chi$$

$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\varphi - 2mc^2\chi \quad \stackrel{|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi| \ll |mc^2\,\chi|}{\Rightarrow} \quad \chi \approx \frac{\hbar}{2imc}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\varphi$$

$$\psi(t,\vec{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}\begin{pmatrix}\varphi(t,\vec{r})\\ \chi(t,\vec{r})\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi = \begin{pmatrix} mc^2\varphi + i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}\\ mc^2\chi + i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t}\end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}$$

$$\stackrel{!}{=} \quad \left(\frac{\hbar c}{i}\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta mc^2\right)\psi = \left[\frac{\hbar c}{i}\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\\ \vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla} & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc^2 & 0\\ 0 & -mc^2\end{pmatrix}\right]\psi$$

$$= \begin{pmatrix} mc^2\varphi + \frac{\hbar c}{i}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\chi\\ -mc^2\chi + \frac{\hbar c}{i}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\varphi\end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}$$

$$\Rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\chi \qquad\qquad \Rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} \approx -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)^2\varphi$$

$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\varphi - 2mc^2\chi \quad \stackrel{|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi| \ll |mc^2\chi|}{\Rightarrow} \quad \chi \approx \frac{\hbar}{2imc}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\varphi$$

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} \approx -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)^2\varphi$$

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} \approx -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)^2\varphi$$

- Erinnerung: $(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}$

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} \approx -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)^2\varphi$$

- Erinnerung: $(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi \approx -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\varphi}$$

  - Schrödinger-ähnliche Gleichung für den zweikomponentigen Spinor φ ($\rightarrow$ Pauli-Spinor, Spin $\frac{1}{2}$, s.u.)

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} \approx -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)^2\varphi$$

- Erinnerung: $(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi \approx -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\varphi}$$

  - Schrödinger-ähnliche Gleichung für den zweikomponentigen Spinor φ ($\rightarrow$ Pauli-Spinor, Spin $\frac{1}{2}$, s.u.)
  - ebene Wellen: $\varphi \propto e^{-\frac{i}{\hbar}(E_{\text{nr}}t - \vec{p}\cdot\vec{r})}$, $\quad E_{\text{nr}} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} \approx -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)^2\varphi$$

- Erinnerung: $(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi \approx -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\varphi}$$

  - Schrödinger-ähnliche Gleichung für den zweikomponentigen Spinor φ ($\rightarrow$ Pauli-Spinor, Spin $\frac{1}{2}$, s.u.)
  - ebene Wellen: $\varphi \propto e^{-\frac{i}{\hbar}(E_{\text{nr}}t-\vec{p}\cdot\vec{r})}$, $\quad E_{\text{nr}} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$

$$\Rightarrow \quad \chi \approx \frac{\hbar}{2imc}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\varphi = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{2mc}\varphi$$

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} \approx -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)^2\varphi$$

- Erinnerung: $(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi \approx -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\varphi}$$

  - Schrödinger-ähnliche Gleichung für den zweikomponentigen Spinor φ ($\rightarrow$ Pauli-Spinor, Spin $\frac{1}{2}$, s.u.)
  - ebene Wellen: $\varphi \propto e^{-\frac{i}{\hbar}(E_{\mathrm{nr}}t - \vec{p}\cdot\vec{r})}, \quad E_{\mathrm{nr}} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$

$$\Rightarrow \quad \chi \approx \frac{\hbar}{2imc}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\varphi = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{2mc}\varphi \quad \overset{|\vec{p}|\ll mc}{\Rightarrow} \quad |\chi| \ll |\varphi|$$

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} \approx -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)^2\varphi$$

- Erinnerung: $(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi \approx -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\varphi}$$

  - Schrödinger-ähnliche Gleichung für den zweikomponentigen Spinor φ ($\rightarrow$ Pauli-Spinor, Spin $\frac{1}{2}$, s.u.)
  - ebene Wellen: $\varphi \propto e^{-\frac{i}{\hbar}(E_{\text{nr}}t-\vec{p}\cdot\vec{r})}, \quad E_{\text{nr}} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$

$$\Rightarrow \quad \chi \approx \frac{\hbar}{2imc}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\varphi = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{2mc}\varphi \quad \stackrel{|\vec{p}|\ll mc}{\Rightarrow} \quad |\chi| \ll |\varphi|$$

$\longrightarrow$ sinnvoller nichtrelativistischer Grenzfall. $\checkmark$

2.10 Dirac-Gleichung mit elektromagnetischem Feld

2.10 Dirac-Gleichung mit elektromagnetischem Feld

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- minimale Substitution: $\partial_\mu \;\to\; D_\mu = \partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c} A_\mu$

2.10 Dirac-Gleichung mit elektromagnetischem Feld

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- minimale Substitution: $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c} A_\mu$

  Einsetzen in die freie Dirac-Gleichung:

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left(i\not{D} - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi \equiv \left(i\not{\partial} - \frac{q}{\hbar c}\not{A} - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0}$$

2.10 Dirac-Gleichung mit elektromagnetischem Feld

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- minimale Substitution: $\partial_\mu \;\to\; D_\mu = \partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c} A_\mu$

  Einsetzen in die freie Dirac-Gleichung:

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left(i\not{D} - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi \;\equiv\; \left(i\not{\partial} - \frac{q}{\hbar c}\not{A} - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0}$$

- nicht-kovariante Form:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \;\to\; i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\,, \qquad \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \;\to\; \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}$$

$$\Rightarrow \quad \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\psi = \left[\vec{\alpha}\cdot\frac{\hbar c}{i}\left(\vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar c}\vec{A}\right) + \beta mc^2\right]\psi$$

2.10 Dirac-Gleichung mit elektromagnetischem Feld

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- minimale Substitution: $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c} A_\mu$

  Einsetzen in die freie Dirac-Gleichung:

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left(i\not{D} - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi \equiv \left(i\not{\partial} - \frac{q}{\hbar c}\not{A} - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0}$$

- nicht-kovariante Form:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\,, \qquad \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \to \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}$$

$$\Rightarrow \quad \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\psi = \left[\vec{\alpha}\cdot\frac{\hbar c}{i}\left(\vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar c}\vec{A}\right) + \beta mc^2\right]\psi$$

$$\Leftrightarrow \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[\vec{\alpha}\cdot\frac{\hbar c}{i}\left(\vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar c}\vec{A}\right) + \beta mc^2 + q\phi\right]\psi$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi = \left[\vec{\alpha}\cdot\frac{\hbar c}{i}\left(\vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar c}\vec{A}\right) + \beta mc^2 + q\phi\right]\psi$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[\vec{\alpha}\cdot\frac{\hbar c}{i}\left(\vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar c}\vec{A}\right) + \beta mc^2 + q\phi\right]\psi$$

- nicht-relativistische Näherung + schwache elektr. Felder: $|\vec{p}|c,\ q\phi \ll mc^2$

  → Ansatz wie zuvor: $\psi = \begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[\vec{\alpha}\cdot\frac{\hbar c}{i}\left(\vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar c}\vec{A}\right) + \beta mc^2 + q\phi\right]\psi$$

- nicht-relativistische Näherung + schwache elektr. Felder: $|\vec{p}|c,\ q\phi \ll mc^2$

→ Ansatz wie zuvor: $\psi = \begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}$

$$\Rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar c}\vec{A}\right)\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar c}\vec{A}\right) + q\phi\right]\varphi$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[\vec{\alpha}\cdot\frac{\hbar c}{i}\left(\vec{\nabla}-\frac{iq}{\hbar c}\vec{A}\right) + \beta mc^2 + q\phi\right]\psi$$

- nicht-relativistische Näherung + schwache elektr. Felder: $|\vec{p}|c,\ q\phi \ll mc^2$

$\longrightarrow$ Ansatz wie zuvor: $\quad \psi = \begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}$

$$\Rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{\nabla}-\frac{iq}{\hbar c}\vec{A}\right)\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{\nabla}-\frac{iq}{\hbar c}\vec{A}\right) + q\phi\right]\varphi$$

$$\overset{\text{Übung}}{\Rightarrow} \quad \boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\nabla}-\frac{iq}{\hbar c}\vec{A}\right)^2 - \frac{\hbar q}{2mc}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + q\phi\right]\varphi} \qquad (\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A})$$

Pauli-Gleichung für nichtrelativist. Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen im elktromagnetischen Feld

- Vereinfachungen:
  - homogenes Magnetfeld: $\vec{B} = const.$
    (wähle z.B. $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$)
  - schwaches Magnetfeld: vernachlässige $\vec{B}^2$-Terme

- Vereinfachungen:
  - homogenes Magnetfeld: $\vec{B} = const.$

    (wähle z.B. $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$)
  - schwaches Magnetfeld: vernachlässige $\vec{B}^{\,2}$-Terme

$$\overset{\text{Übung}}{\Rightarrow} \quad \boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 - \frac{q}{2mc}\left(\vec{L} + 2\vec{S}\right)\cdot\vec{B} + q\phi\right]\varphi}$$

mit $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ Bahndrehimpuls

$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ Spin

Spin

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Erinnerung an die nichtrelativistische QM:

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \quad \Rightarrow \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{S}^{\,2} = \frac{\hbar^2}{4}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) = \frac{3}{4}\hbar^2 \mathbb{1}$$

Spin

- Erinnerung an die nichtrelativistische QM:

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \quad \Rightarrow \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{S}^{\,2} = \frac{\hbar^2}{4}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) = \frac{3}{4}\hbar^2 \mathbb{1} \quad = \quad s(s+1)\hbar^2 \mathbb{1} \qquad \text{mit } s = \frac{1}{2}$$

Spin

- Erinnerung an die nichtrelativistische QM:

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \quad \Rightarrow \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{S}^{\,2} = \frac{\hbar^2}{4}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) = \frac{3}{4}\hbar^2 \mathbb{1} \quad = \quad s(s+1)\hbar^2 \mathbb{1} \quad \text{mit } s = \frac{1}{2}$$

- gemeinsame Eigenzustände von $\vec{S}^{\,2}$ und S_z:

$$\left|s = \tfrac{1}{2}, m_s = +\tfrac{1}{2}\right\rangle \equiv \varphi_\uparrow \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S_z\varphi_\uparrow = \frac{\hbar}{2}\varphi_\uparrow$$

$$\left|s = \tfrac{1}{2}, m_s = -\tfrac{1}{2}\right\rangle \equiv \varphi_\downarrow \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S_z\varphi_\downarrow = -\frac{\hbar}{2}\varphi_\downarrow$$

- Wir hatten: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 - \frac{q}{2mc} \left(\vec{L} + 2\vec{S} \right) \cdot \vec{B} + q\phi \right] \varphi$

→ magnetische Wechselwirkungsenergie:

$$E_{\text{magn}} = -\frac{q}{2mc} \left(\vec{L} + 2\vec{S} \right) \cdot \vec{B}$$

- Wir hatten: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 - \frac{q}{2mc}\left(\vec{L} + 2\vec{S}\right)\cdot\vec{B} + q\phi \right]\varphi$

→ magnetische Wechselwirkungsenergie:

$$E_{\text{magn}} = -\frac{q}{2mc}\left(\vec{L} + 2\vec{S}\right)\cdot\vec{B} \equiv -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

- Wir hatten: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 - \frac{q}{2mc}\left(\vec{L} + 2\vec{S}\right)\cdot\vec{B} + q\phi\right]\varphi$

→ magnetische Wechselwirkungsenergie:

$$E_{\text{magn}} = -\frac{q}{2mc}\left(\vec{L} + 2\vec{S}\right)\cdot\vec{B} \equiv -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

- magnetisches Moment: $\vec{\mu} = \vec{\mu}_{\text{Bahn}} + \vec{\mu}_{\text{Spin}}$
  - $\vec{\mu}_{\text{Bahn}} = \frac{q}{2mc}\vec{L}$
  - $\vec{\mu}_{\text{Spin}} = \frac{q}{2mc}\,2\vec{S}$

- Wir hatten: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 - \frac{q}{2mc}\left(\vec{L}+2\vec{S}\right)\cdot\vec{B} + q\phi\right]\varphi$

→ magnetische Wechselwirkungsenergie:

$$E_{\text{magn}} = -\frac{q}{2mc}\left(\vec{L}+2\vec{S}\right)\cdot\vec{B} \equiv -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

- magnetisches Moment: $\vec{\mu} = \vec{\mu}_{\text{Bahn}} + \vec{\mu}_{\text{Spin}}$
  - $\vec{\mu}_{\text{Bahn}} = \frac{q}{2mc}\vec{L}$
  - $\vec{\mu}_{\text{Spin}} = \frac{q}{2mc}2\vec{S} \equiv \frac{q}{2mc}g\vec{S}, \quad g = 2$ „gyromagnetisches Verhältnis"

- Wir hatten: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 - \frac{q}{2mc}\left(\vec{L} + 2\vec{S}\right) \cdot \vec{B} + q\phi \right] \varphi$

→ magnetische Wechselwirkungsenergie:

$$E_{\text{magn}} = -\frac{q}{2mc}\left(\vec{L} + 2\vec{S}\right) \cdot \vec{B} \equiv -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

- magnetisches Moment: $\vec{\mu} = \vec{\mu}_{\text{Bahn}} + \vec{\mu}_{\text{Spin}}$
  - $\vec{\mu}_{\text{Bahn}} = \frac{q}{2mc}\vec{L}$
  - $\vec{\mu}_{\text{Spin}} = \frac{q}{2mc} 2\vec{S} \equiv \frac{q}{2mc} g\vec{S}, \quad g = 2$ „gyromagnetisches Verhältnis"
- experimentell: $g_{e^-} = 2 \cdot (1{,}001\,159\,652\,180\,73(28))$

  ↑

  QED-Strahlungskorrekturen

- Wir hatten: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 - \frac{q}{2mc}\left(\vec{L}+2\vec{S}\right)\cdot\vec{B} + q\phi\right]\varphi$

→ magnetische Wechselwirkungsenergie:

$$E_{\text{magn}} = -\frac{q}{2mc}\left(\vec{L}+2\vec{S}\right)\cdot\vec{B} \equiv -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

- magnetisches Moment: $\vec{\mu} = \vec{\mu}_{\text{Bahn}} + \vec{\mu}_{\text{Spin}}$
  - $\vec{\mu}_{\text{Bahn}} = \frac{q}{2mc}\vec{L}$
  - $\vec{\mu}_{\text{Spin}} = \frac{q}{2mc}2\vec{S} \equiv \frac{q}{2mc}g\vec{S}, \quad g = 2$ „gyromagnetisches Verhältnis"
- experimentell: $g_{e^-} = 2\cdot(1,001\,159\,652\,180\,73(28))$

  $\uparrow$

  QED-Strahlungskorrekturen

  $g_p = 2\cdot 2,79$ nicht punktförmig (kein „Dirac-Teilchen")

2.11 Lorentz-Kovarianz der Dirac-Gleichung: Spinor-Transformationen

2.11 Lorentz-Kovarianz der Dirac-Gleichung: Spinor-Transformationen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Ziel:

  Wir wollen zeigen, dass die Dirac-Gleichung, $\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0$,
  unter Lorentz-Transformationen $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ forminvariant ist,
  also im „gestrichenen" Koordinatensystem Form

  $$\left(i\gamma^\mu\partial'_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi'(x') = 0 \qquad \left(\partial'_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x'^\mu}\right)$$

  annimmt.

2.11 Lorentz-Kovarianz der Dirac-Gleichung: Spinor-Transformationen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Ziel:

  Wir wollen zeigen, dass die Dirac-Gleichung, $\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0$, unter Lorentz-Transformationen $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ forminvariant ist, also im „gestrichenen" Koordinatensystem Form

  $$\left(i\gamma^\mu \partial'_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi'(x') = 0 \qquad \left(\partial'_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x'^\mu}\right)$$

  annimmt.

- Bemerkungen:
  - Die γ-Matrizen sollen nicht transformiert werden.
    Insbesondere sind sie nicht die Komponenten eines Vierervektors.

2.11 Lorentz-Kovarianz der Dirac-Gleichung: Spinor-Transformationen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Ziel:

  Wir wollen zeigen, dass die Dirac-Gleichung, $\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0$, unter Lorentz-Transformationen $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ forminvariant ist, also im „gestrichenen" Koordinatensystem Form

  $$\left(i\gamma^\mu\partial'_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi'(x') = 0 \qquad \left(\partial'_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x'^\mu}\right)$$

  annimmt.

- Bemerkungen:
  - Die γ-Matrizen sollen nicht transformiert werden. Insbesondere sind sie nicht die Komponenten eines Vierervektors.
  - Es ist damit zu rechnen, dass sich der Spinor nicht wie ein Skalarfeld verhält (vgl. Klein-Gordon: $\Phi'(x') = \Phi(x)$), sondern nicht-trivial transformiert:

    $$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x), \quad S(\Lambda)\text{: Matrix im Dirac-Spinor-Raum}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$0 = \left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x)$$

$$0 = \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \tfrac{mc}{\hbar}\right) \psi(x) \qquad\qquad \partial_\mu = \partial'_\nu \Lambda^\nu{}_\mu, \quad \psi(x) = S^{-1}(\Lambda)\psi'(x')$$

$$= \left(i\gamma^\mu \partial'_\nu \Lambda^\nu{}_\mu - \tfrac{mc}{\hbar}\right) S^{-1}(\Lambda)\psi'(x')$$

$$0 = \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \tfrac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) \qquad\qquad \partial_\mu = \partial'_\nu \Lambda^\nu{}_\mu, \quad \psi(x) = S^{-1}(\Lambda)\psi'(x')$$

$$= \left(i\gamma^\mu \partial'_\nu \Lambda^\nu{}_\mu - \tfrac{mc}{\hbar}\right) S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') \qquad \mid S(\Lambda)\times$$

$$= \left(iS(\Lambda)\gamma^\mu \partial'_\nu \Lambda^\nu{}_\mu S^{-1}(\Lambda) - \tfrac{mc}{\hbar}\right)\psi'(x')$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \tfrac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) \qquad\qquad \partial_\mu = \partial'_\nu \Lambda^\nu{}_\mu, \quad \psi(x) = S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') \\
&= \left(i\gamma^\mu\partial'_\nu \Lambda^\nu{}_\mu - \tfrac{mc}{\hbar}\right) S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') \qquad \mid S(\Lambda)\times \\
&= \left(iS(\Lambda)\gamma^\mu\partial'_\nu \Lambda^\nu{}_\mu S^{-1}(\Lambda) - \tfrac{mc}{\hbar}\right)\psi'(x') \\
&= \left(iS(\Lambda)\Lambda^\nu{}_\mu\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\,\partial'_\nu - \tfrac{mc}{\hbar}\right)\psi'(x')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \tfrac{mc}{\hbar}\right) \psi(x) & \partial_\mu &= \partial'_\nu \Lambda^\nu{}_\mu, \quad \psi(x) = S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') \\
&= \left(i\gamma^\mu \partial'_\nu \Lambda^\nu{}_\mu - \tfrac{mc}{\hbar}\right) S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') & &\mid S(\Lambda) \times \\
&= \left(iS(\Lambda)\gamma^\mu \partial'_\nu \Lambda^\nu{}_\mu S^{-1}(\Lambda) - \tfrac{mc}{\hbar}\right) \psi'(x') \\
&= \left(iS(\Lambda)\Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\, \partial'_\nu - \tfrac{mc}{\hbar}\right) \psi'(x') \\
&\overset{!}{=} \left(i\gamma^\nu \partial'_\nu - \tfrac{mc}{\hbar}\right) \psi'(x')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \tfrac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) & \qquad \partial_\mu = \partial'_\nu \Lambda^\nu{}_\mu, \quad \psi(x) = S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') \\
&= \left(i\gamma^\mu \partial'_\nu \Lambda^\nu{}_\mu - \tfrac{mc}{\hbar}\right) S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') & \qquad \mid S(\Lambda)\times \\
&= \left(iS(\Lambda)\gamma^\mu \partial'_\nu \Lambda^\nu{}_\mu S^{-1}(\Lambda) - \tfrac{mc}{\hbar}\right)\psi'(x') \\
&= \left(iS(\Lambda)\Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\,\partial'_\nu - \tfrac{mc}{\hbar}\right)\psi'(x') \\
&\stackrel{!}{=} \left(i\gamma^\nu \partial'_\nu - \tfrac{mc}{\hbar}\right)\psi'(x') & \Rightarrow \quad S(\Lambda)\Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) \stackrel{!}{=} \gamma^\nu
\end{aligned}
$$

$$0 = \left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \tfrac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) \qquad\qquad \partial_\mu = \partial'_\nu \Lambda^\nu{}_\mu, \quad \psi(x) = S^{-1}(\Lambda)\psi'(x')$$

$$= \left(i\gamma^\mu\partial'_\nu \Lambda^\nu{}_\mu - \tfrac{mc}{\hbar}\right) S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') \qquad \mid S(\Lambda)\times$$

$$= \left(iS(\Lambda)\gamma^\mu\partial'_\nu \Lambda^\nu{}_\mu S^{-1}(\Lambda) - \tfrac{mc}{\hbar}\right)\psi'(x')$$

$$= \left(iS(\Lambda)\Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\,\partial'_\nu - \tfrac{mc}{\hbar}\right)\psi'(x')$$

$$\stackrel{!}{=} \left(i\gamma^\nu\partial'_\nu - \tfrac{mc}{\hbar}\right)\psi'(x') \qquad \Rightarrow \quad S(\Lambda)\Lambda^\nu{}_\mu\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) \stackrel{!}{=} \gamma^\nu$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{S^{-1}(\Lambda)\,\gamma^\nu S(\Lambda) = \Lambda^\nu{}_\mu\gamma^\mu}$$

$$0 = \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \tfrac{mc}{\hbar}\right) \psi(x) \qquad\qquad \partial_\mu = \partial'_\nu \Lambda^\nu{}_\mu, \quad \psi(x) = S^{-1}(\Lambda)\psi'(x')$$

$$= \left(i\gamma^\mu \partial'_\nu \Lambda^\nu{}_\mu - \tfrac{mc}{\hbar}\right) S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') \qquad \mid S(\Lambda)\times$$

$$= \left(iS(\Lambda)\gamma^\mu \partial'_\nu \Lambda^\nu{}_\mu S^{-1}(\Lambda) - \tfrac{mc}{\hbar}\right) \psi'(x')$$

$$= \left(iS(\Lambda)\Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\, \partial'_\nu - \tfrac{mc}{\hbar}\right) \psi'(x')$$

$$\stackrel{!}{=} \left(i\gamma^\nu \partial'_\nu - \tfrac{mc}{\hbar}\right) \psi'(x') \qquad \Rightarrow \quad S(\Lambda)\Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) \stackrel{!}{=} \gamma^\nu$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{S^{-1}(\Lambda)\, \gamma^\nu S(\Lambda) = \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu}$$

- Die rechte Seite sieht aus wie Transformation eines Vierervektors.

Explizite Konstruktion von $S(\Lambda)$

Explizite Konstruktion von S(Λ)

- infinitesimale eigentliche orthochrone Lorentz-Transformation:

$$\Lambda^\nu{}_\mu = g^\nu{}_\mu + \Delta\omega^\nu{}_\mu\,, \qquad \Delta\omega^\nu{}_\mu\text{:} \quad \text{infinitesimal}$$

Explizite Konstruktion von $S(\Lambda)$

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- infinitesimale eigentliche orthochrone Lorentz-Transformation:

  $\Lambda^{\nu}{}_{\mu} = g^{\nu}{}_{\mu} + \Delta\omega^{\nu}{}_{\mu}\,, \qquad \Delta\omega^{\nu}{}_{\mu}:$ infinitesimal

- Allgemein gilt (vgl. Abschnitt 2.2): $\quad \Lambda_{\mu}{}^{\alpha}\Lambda^{\mu}{}_{\beta} = g^{\alpha}{}_{\beta}$

Explizite Konstruktion von S(Λ)

- infinitesimale eigentliche orthochrone Lorentz-Transformation:

$\Lambda^{\nu}{}_{\mu} = g^{\nu}{}_{\mu} + \Delta\omega^{\nu}{}_{\mu}\,, \qquad \Delta\omega^{\nu}{}_{\mu}$: infinitesimal

- Allgemein gilt (vgl. Abschnitt 2.2): $\Lambda_{\mu}{}^{\alpha}\Lambda^{\mu}{}_{\beta} = g^{\alpha}{}_{\beta}$

$$\Rightarrow \quad g^{\alpha}{}_{\beta} = \left(g_{\mu}{}^{\alpha} + \Delta\omega_{\mu}{}^{\alpha}\right)\left(g^{\mu}{}_{\beta} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\beta}\right)$$

Explizite Konstruktion von S(Λ)

- infinitesimale eigentliche orthochrone Lorentz-Transformation:

$$\Lambda^{\nu}{}_{\mu} = g^{\nu}{}_{\mu} + \Delta\omega^{\nu}{}_{\mu}\,, \qquad \Delta\omega^{\nu}{}_{\mu}: \text{ infinitesimal}$$

- Allgemein gilt (vgl. Abschnitt 2.2): $\Lambda_{\mu}{}^{\alpha}\Lambda^{\mu}{}_{\beta} = g^{\alpha}{}_{\beta}$

$$\Rightarrow \quad g^{\alpha}{}_{\beta} = \left(g_{\mu}{}^{\alpha} + \Delta\omega_{\mu}{}^{\alpha}\right)\left(g^{\mu}{}_{\beta} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\beta}\right) \quad = g^{\alpha}{}_{\beta} + \Delta\omega^{\alpha}{}_{\beta} + \Delta\omega_{\beta}{}^{\alpha} + \mathcal{O}(\Delta\omega^2)$$

Explizite Konstruktion von S(Λ)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- infinitesimale eigentliche orthochrone Lorentz-Transformation:

  $\Lambda^\nu{}_\mu = g^\nu{}_\mu + \Delta\omega^\nu{}_\mu\,, \qquad \Delta\omega^\nu{}_\mu$: infinitesimal

- Allgemein gilt (vgl. Abschnitt 2.2): $\Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda^\mu{}_\beta = g^\alpha{}_\beta$

  $$\Rightarrow \quad g^\alpha{}_\beta = \left(g_\mu{}^\alpha + \Delta\omega_\mu{}^\alpha\right)\left(g^\mu{}_\beta + \Delta\omega^\mu{}_\beta\right) \quad = g^\alpha{}_\beta + \Delta\omega^\alpha{}_\beta + \Delta\omega_\beta{}^\alpha + \mathcal{O}(\Delta\omega^2)$$

  $$\Rightarrow \quad \Delta\omega^\alpha{}_\beta + \Delta\omega_\beta{}^\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\omega^{\alpha\beta} + \Delta\omega^{\beta\alpha} = 0$$

  $\rightarrow$ $(\Delta\omega^{\alpha\beta})$ ist eine antisymmetrische 4×4-Matrix

Explizite Konstruktion von S(Λ)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- infinitesimale eigentliche orthochrone Lorentz-Transformation:

$$\Lambda^{\nu}{}_{\mu} = g^{\nu}{}_{\mu} + \Delta\omega^{\nu}{}_{\mu}\,, \qquad \Delta\omega^{\nu}{}_{\mu}: \ \text{infinitesimal}$$

- Allgemein gilt (vgl. Abschnitt 2.2): $\Lambda_{\mu}{}^{\alpha}\Lambda^{\mu}{}_{\beta} = g^{\alpha}{}_{\beta}$

$$\Rightarrow \quad g^{\alpha}{}_{\beta} = \left(g_{\mu}{}^{\alpha} + \Delta\omega_{\mu}{}^{\alpha}\right)\left(g^{\mu}{}_{\beta} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\beta}\right) \ = g^{\alpha}{}_{\beta} + \Delta\omega^{\alpha}{}_{\beta} + \Delta\omega_{\beta}{}^{\alpha} + \mathcal{O}(\Delta\omega^2)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\omega^{\alpha}{}_{\beta} + \Delta\omega_{\beta}{}^{\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\omega^{\alpha\beta} + \Delta\omega^{\beta\alpha} = 0$$

➞ $(\Delta\omega^{\alpha\beta})$ ist eine antisymmetrische 4×4-Matrix

➞ 6 unabhängige Komponenten: $\Delta\omega^{01}, \Delta\omega^{02}, \Delta\omega^{03}, \Delta\omega^{23}, \Delta\omega^{13}, \Delta\omega^{12}$

$\hat{=}$ 6 Generatoren der Lorentz-Gruppe:

- 3 Boosts in x-, y- und z-Richtung
- 3 Drehungen um die x-, y- und z-Achse

- Ansatz: $S(\Lambda) = \mathbb{1} + \tau \,, \quad \tau$ = infinitesimale 4×4-Matrix

- **Ansatz:** $\quad S(\Lambda) = \mathbb{1} + \tau\,, \quad \tau$ = infinitesimale 4×4-Matrix

$$\Rightarrow \quad S^{-1}(\Lambda) = \mathbb{1} - \tau \qquad (\Rightarrow\ S^{-1}S = \mathbb{1} + \mathcal{O}(\tau^2) \quad \checkmark)$$

- Ansatz: $S(\Lambda) = \mathbb{1} + \tau\,, \quad \tau$ = infinitesimale 4×4-Matrix

  $$\Rightarrow \quad S^{-1}(\Lambda) = \mathbb{1} - \tau \qquad (\Rightarrow\ S^{-1}S = \mathbb{1} + \mathcal{O}(\tau^2) \quad \checkmark)$$

- $S^{-1}\gamma^\nu S \overset{!}{=} \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu$

  $$\Rightarrow \quad (\mathbb{1} - \tau)\gamma^\nu(\mathbb{1} + \tau) \;=\; \left(g^\nu{}_\mu + \Delta\omega^\nu{}_\mu\right)\gamma^\mu$$

- Ansatz: $S(\Lambda) = \mathbb{1} + \tau$, τ = infinitesimale 4×4-Matrix

  $$\Rightarrow \quad S^{-1}(\Lambda) = \mathbb{1} - \tau \qquad (\Rightarrow \; S^{-1}S = \mathbb{1} + \mathcal{O}(\tau^2) \quad \checkmark)$$

- $S^{-1}\gamma^\nu S \overset{!}{=} \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu$

  $$\Rightarrow \quad (\mathbb{1} - \tau)\gamma^\nu(\mathbb{1} + \tau) \; = \; \left(g^\nu{}_\mu + \Delta\omega^\nu{}_\mu\right)\gamma^\mu$$

  $$\Leftrightarrow \quad \gamma^\nu + \gamma^\nu\tau - \tau\gamma^\nu \; = \; \gamma^\nu + \Delta\omega^\nu{}_\mu\gamma^\mu \quad \Leftrightarrow \quad \left[\gamma^\nu, \tau\right] = \Delta\omega^\nu{}_\mu\gamma^\mu$$

- Ansatz: $S(\Lambda) = \mathbb{1} + \tau\,, \quad \tau$ = infinitesimale 4×4-Matrix

  $$\Rightarrow \quad S^{-1}(\Lambda) = \mathbb{1} - \tau \qquad (\Rightarrow S^{-1}S = \mathbb{1} + \mathcal{O}(\tau^2) \quad \checkmark)$$

- $S^{-1}\gamma^\nu S \stackrel{!}{=} \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu$

  $$\Rightarrow \quad (\mathbb{1} - \tau)\gamma^\nu(\mathbb{1} + \tau) \;=\; \left(g^\nu{}_\mu + \Delta\omega^\nu{}_\mu\right)\gamma^\mu$$

  $$\Leftrightarrow \quad \gamma^\nu + \gamma^\nu\tau - \tau\gamma^\nu \;=\; \gamma^\nu + \Delta\omega^\nu{}_\mu\gamma^\mu \quad \Leftrightarrow \quad \left[\gamma^\nu, \tau\right] = \Delta\omega^\nu{}_\mu\gamma^\mu$$

- Lösung: $\tau = -\frac{i}{4}\Delta\omega^{\alpha\beta}\,\sigma_{\alpha\beta}$ mit $\sigma_{\alpha\beta} \equiv \frac{i}{2}\left[\gamma_\alpha, \gamma_\beta\right]$

- **Ansatz:** $S(\Lambda) = \mathbb{1} + \tau\,, \quad \tau$ = infinitesimale 4×4-Matrix

  $\Rightarrow \quad S^{-1}(\Lambda) = \mathbb{1} - \tau \qquad (\Rightarrow S^{-1}S = \mathbb{1} + \mathcal{O}(\tau^2) \quad \checkmark)$

- $S^{-1}\gamma^\nu S \stackrel{!}{=} \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu$

  $\Rightarrow \quad (\mathbb{1} - \tau)\gamma^\nu(\mathbb{1} + \tau) \; = \; \left(g^\nu{}_\mu + \Delta\omega^\nu{}_\mu\right)\gamma^\mu$

  $\Leftrightarrow \quad \gamma^\nu + \gamma^\nu\tau - \tau\gamma^\nu \; = \; \gamma^\nu + \Delta\omega^\nu{}_\mu\gamma^\mu \quad \Leftrightarrow \quad \left[\gamma^\nu, \tau\right] = \Delta\omega^\nu{}_\mu\gamma^\mu$

- **Lösung:** $\tau = -\frac{i}{4}\Delta\omega^{\alpha\beta}\,\sigma_{\alpha\beta}$ mit $\sigma_{\alpha\beta} \equiv \frac{i}{2}\left[\gamma_\alpha, \gamma_\beta\right]$

  Beweis: explizites Auswerten von $\left[\gamma^\nu, \tau\right] = \frac{1}{8}\Delta\omega^{\alpha\beta}\left[\gamma^\nu, [\gamma_\alpha, \gamma_\beta]\right]$
  unter Verwendung von

  - $\left\{\gamma_\alpha, \gamma_\beta\right\} = 2g_{\alpha\beta} \Leftrightarrow \gamma_\beta\gamma_\alpha = -\gamma_\alpha\gamma_\beta + 2g_{\alpha\beta}$
  - $\Delta\omega^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} = 0$, da $(\Delta\omega^{\alpha\beta})$ antisymmetrisch ist.

- infinitesimale Transformationen:

$$\boxed{S(\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu}{}_{\nu} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu}) = \mathbb{1} - \frac{i}{4}\Delta\omega^{\alpha\beta}\,\sigma_{\alpha\beta}}$$

- infinitesimale Transformationen:

$$\boxed{S(\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu}{}_{\nu} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu}) = \mathbb{1} - \frac{i}{4}\Delta\omega^{\alpha\beta}\,\sigma_{\alpha\beta}}$$

- endliche Transformationen:

  Hintereinanderschalten unendlich vieler infinitesimaler Transformationen