2. Relativistische Quantenmechanik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2.1 Motivation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2.1 Motivation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Die nichtrelativistische QM hat sich in vielen Bereichen der Physik bewährt, z.B. Wasserstoff-Atom.

  $\rightarrow$ Warum relativistische QM?

2.1 Motivation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Die nichtrelativistische QM hat sich in vielen Bereichen der Physik bewährt, z.B. Wasserstoff-Atom.

  → Warum relativistische QM?

- Schon in der klassischen Physik gehorcht die Welt der Relativitätstheorie, die Newton'sche Physik ist bestenfalls eine gute Näherung dazu.

  → Im Streben nach einer möglichst korrekten Theorie sollte man versuchen, auch die QM relativistisch zu formulieren.

2.1 Motivation

- Die nichtrelativistische QM hat sich in vielen Bereichen der Physik bewährt, z.B. Wasserstoff-Atom.

  → Warum relativistische QM?

- Schon in der klassischen Physik gehorcht die Welt der Relativitätstheorie, die Newton'sche Physik ist bestenfalls eine gute Näherung dazu.

  → Im Streben nach einer möglichst korrekten Theorie sollte man versuchen, auch die QM relativistisch zu formulieren.

- Bislang ist das nur für die spezielle Relativitätstheorie gelungen, führt dort aber auch im Bereich kleiner Geschwindigkeiten zu tieferen Einsichten:
  - Existenz von Antiteilchen
  - Natur des Spins

2.1 Motivation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gerade in der Welt des „ganz Kleinen”, für die eine qm. Beschreibung wichtig ist, werden aber auch die höchsten Geschwindigkeiten erreicht, z.B. kosmische Höhenstrahlung, Teilchen-Beschleuniger.

2.1 Motivation

- Gerade in der Welt des „ganz Kleinen", für die eine qm. Beschreibung wichtig ist, werden aber auch die höchsten Geschwindigkeiten erreicht, z.B. kosmische Höhenstrahlung, Teilchen-Beschleuniger.

- Abschätzung: Bohr'sches Atommodell

  Elektronen bewegen sich auf Kreisbahnen mit $L = n\hbar$

2.1 Motivation

- Gerade in der Welt des „ganz Kleinen", für die eine qm. Beschreibung wichtig ist, werden aber auch die höchsten Geschwindigkeiten erreicht, z.B. kosmische Höhenstrahlung, Teilchen-Beschleuniger.

- Abschätzung: Bohr'sches Atommodell

  Elektronen bewegen sich auf Kreisbahnen mit $L = n\hbar$

  $n = 1: \quad L = r\,p = rmv = \hbar$

2.1 Motivation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gerade in der Welt des „ganz Kleinen”, für die eine qm. Beschreibung wichtig ist, werden aber auch die höchsten Geschwindigkeiten erreicht, z.B. kosmische Höhenstrahlung, Teilchen-Beschleuniger.

- Abschätzung: Bohr'sches Atommodell

  Elektronen bewegen sich auf Kreisbahnen mit $L = n\hbar$

  $n = 1: \quad L = r\,p = rmv = \hbar \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{\hbar}{r\,m}$

2.1 Motivation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gerade in der Welt des „ganz Kleinen”, für die eine qm. Beschreibung wichtig ist, werden aber auch die höchsten Geschwindigkeiten erreicht, z.B. kosmische Höhenstrahlung, Teilchen-Beschleuniger.
- Abschätzung: Bohr'sches Atommodell

  Elektronen bewegen sich auf Kreisbahnen mit $L = n\hbar$

  $$n = 1: \quad L = r\,p = rmv = \hbar \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{v}{c} = \frac{\hbar c}{r\,mc^2}$$

2.1 Motivation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gerade in der Welt des „ganz Kleinen”, für die eine qm. Beschreibung wichtig ist, werden aber auch die höchsten Geschwindigkeiten erreicht, z.B. kosmische Höhenstrahlung, Teilchen-Beschleuniger.

- Abschätzung: Bohr'sches Atommodell

  Elektronen bewegen sich auf Kreisbahnen mit $L = n\hbar$

  $$n = 1: \quad L = r\,p = rmv = \hbar \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{v}{c} = \frac{\hbar c}{r\,mc^2}$$

  $$\hbar c \approx 200\,\text{MeV fm} = 2\,\text{keV Å}$$

2.1 Motivation

- Gerade in der Welt des „ganz Kleinen", für die eine qm. Beschreibung wichtig ist, werden aber auch die höchsten Geschwindigkeiten erreicht, z.B. kosmische Höhenstrahlung, Teilchen-Beschleuniger.

- Abschätzung: Bohr'sches Atommodell

  Elektronen bewegen sich auf Kreisbahnen mit $L = n\hbar$

  $n = 1$: $\quad L = r\,p = rmv = \hbar \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{v}{c} = \frac{\hbar c}{r\,mc^2}$

  $\hbar c \approx 200\,\mathrm{MeV\,fm} = 2\,\mathrm{keV\,Å}$

  Elektron: $mc^2 = 511\,\mathrm{keV}$

2.1 Motivation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gerade in der Welt des „ganz Kleinen”, für die eine qm. Beschreibung wichtig ist, werden aber auch die höchsten Geschwindigkeiten erreicht, z.B. kosmische Höhenstrahlung, Teilchen-Beschleuniger.
- Abschätzung: Bohr'sches Atommodell

  Elektronen bewegen sich auf Kreisbahnen mit $L = n\hbar$

  $n = 1: \quad L = r\,p = rmv = \hbar \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{v}{c} = \frac{\hbar c}{r\,mc^2}$

  $\hbar c \approx 200\,\text{MeV fm} = 2\,\text{keV Å}$

  Elektron: $mc^2 = 511\,\text{keV}$

  Bohr'scher Radius (Wasserstoff): $r_B \approx 0,5\text{Å}$

2.1 Motivation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gerade in der Welt des „ganz Kleinen”, für die eine qm. Beschreibung wichtig ist, werden aber auch die höchsten Geschwindigkeiten erreicht, z.B. kosmische Höhenstrahlung, Teilchen-Beschleuniger.

- Abschätzung: Bohr'sches Atommodell

  Elektronen bewegen sich auf Kreisbahnen mit $L = n\hbar$

  $$n = 1: \quad L = r\,p = rmv = \hbar \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{v}{c} = \frac{\hbar c}{r\,mc^2} \approx \frac{2\,\text{keV}\,\text{Å}}{0{,}5\text{Å}\cdot 500\,\text{keV}}$$

  $\hbar c \approx 200\,\text{MeV fm} = 2\,\text{keV Å}$

  Elektron: $mc^2 = 511\,\text{keV}$

  Bohr'scher Radius (Wasserstoff): $r_B \approx 0,5\text{Å}$

2.1 Motivation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gerade in der Welt des „ganz Kleinen”, für die eine qm. Beschreibung wichtig ist, werden aber auch die höchsten Geschwindigkeiten erreicht, z.B. kosmische Höhenstrahlung, Teilchen-Beschleuniger.

- Abschätzung: Bohr'sches Atommodell

  Elektronen bewegen sich auf Kreisbahnen mit $L = n\hbar$

  $$n = 1: \quad L = r\,p = rmv = \hbar \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{v}{c} = \frac{\hbar c}{r\,mc^2} \approx \frac{2\,\text{keV Å}}{0{,}5\text{Å}\cdot 500\,\text{keV}} = \frac{1}{125}$$

  $\hbar c \approx 200\,\text{MeV fm} = 2\,\text{keV Å}$

  Elektron: $mc^2 = 511\,\text{keV}$

  Bohr'scher Radius (Wasserstoff): $r_B \approx 0,5\text{Å}$

2.1 Motivation

- Gerade in der Welt des „ganz Kleinen", für die eine qm. Beschreibung wichtig ist, werden aber auch die höchsten Geschwindigkeiten erreicht, z.B. kosmische Höhenstrahlung, Teilchen-Beschleuniger.

- Abschätzung: Bohr'sches Atommodell

  Elektronen bewegen sich auf Kreisbahnen mit $L = n\hbar$

  $$n = 1: \quad L = r\,p = rmv = \hbar \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{v}{c} = \frac{\hbar c}{r\,mc^2}$$

  Bohr'scher Radius (Kernladungszahl Z): $r = \frac{\hbar^2}{Z\,e^2\,m}$

2.1 Motivation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gerade in der Welt des „ganz Kleinen”, für die eine qm. Beschreibung wichtig ist, werden aber auch die höchsten Geschwindigkeiten erreicht, z.B. kosmische Höhenstrahlung, Teilchen-Beschleuniger.

- Abschätzung: Bohr'sches Atommodell

  Elektronen bewegen sich auf Kreisbahnen mit $L = n\hbar$

  $n = 1: \quad L = r\,p = rmv = \hbar \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{v}{c} = \frac{\hbar c}{r\,mc^2}$

  Bohr'scher Radius (Kernladungszahl Z): $\quad r = \frac{\hbar^2}{Z\,e^2\,m} = \frac{\hbar c}{Z\alpha\,mc^2}$

  Feinstrukturkonstante: $\quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$

2.1 Motivation

- Gerade in der Welt des „ganz Kleinen", für die eine qm. Beschreibung wichtig ist, werden aber auch die höchsten Geschwindigkeiten erreicht, z.B. kosmische Höhenstrahlung, Teilchen-Beschleuniger.
- Abschätzung: Bohr'sches Atommodell

  Elektronen bewegen sich auf Kreisbahnen mit $L = n\hbar$

  $n = 1$: $\quad L = r\,p = rmv = \hbar \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{v}{c} = \frac{\hbar c}{r\,mc^2} \quad = Z\alpha = \frac{Z}{137}$

  Bohr'scher Radius (Kernladungszahl Z): $\quad r = \frac{\hbar^2}{Z\,e^2\,m} = \frac{\hbar c}{Z\alpha\,mc^2}$

  Feinstrukturkonstante: $\quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$

2.1 Motivation

- Gerade in der Welt des „ganz Kleinen", für die eine qm. Beschreibung wichtig ist, werden aber auch die höchsten Geschwindigkeiten erreicht, z.B. kosmische Höhenstrahlung, Teilchen-Beschleuniger.

- Abschätzung: Bohr'sches Atommodell

  Elektronen bewegen sich auf Kreisbahnen mit $L = n\hbar$

  $n = 1$: $\quad L = r\,p = rmv = \hbar \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v}{c} = \frac{\hbar c}{r\,mc^2} = Z\alpha = \frac{Z}{137}$

  Bohr'scher Radius (Kernladungszahl Z): $\quad r = \frac{\hbar^2}{Z\,e^2\,m} = \frac{\hbar c}{Z\alpha\,mc^2}$

  Feinstrukturkonstante: $\quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$

  - Wasserstoff: $\quad Z = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \frac{1}{137} \quad$ nichtrelativist. Näherung ok

2.1 Motivation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gerade in der Welt des „ganz Kleinen", für die eine qm. Beschreibung wichtig ist, werden aber auch die höchsten Geschwindigkeiten erreicht, z.B. kosmische Höhenstrahlung, Teilchen-Beschleuniger.
- Abschätzung: Bohr'sches Atommodell

  Elektronen bewegen sich auf Kreisbahnen mit $L = n\hbar$

  $n = 1$: $L = r\,p = rmv = \hbar \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v}{c} = \frac{\hbar c}{r\,mc^2} = Z\alpha = \frac{Z}{137}$

  Bohr'scher Radius (Kernladungszahl Z): $r = \frac{\hbar^2}{Z\,e^2\,m} = \frac{\hbar c}{Z\alpha\,mc^2}$

  Feinstrukturkonstante: $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$

  - Wasserstoff: $Z = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \frac{1}{137}$ nichtrelativist. Näherung ok
  - Urankern: $Z = 92 \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = 0,67$ " " fragwürdig

2.1 Motivation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gerade in der Welt des „ganz Kleinen", für die eine qm. Beschreibung wichtig ist, werden aber auch die höchsten Geschwindigkeiten erreicht, z.B. kosmische Höhenstrahlung, Teilchen-Beschleuniger.

- Abschätzung: Bohr'sches Atommodell

  Elektronen bewegen sich auf Kreisbahnen mit $L = n\hbar$

  $n = 1: \quad L = r\,p = rmv = \hbar \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{v}{c} = \frac{\hbar c}{r\,mc^2} = Z\alpha = \frac{Z}{137}$

  Bohr'scher Radius (Kernladungszahl Z): $r = \frac{\hbar^2}{Z\,e^2\,m} = \frac{\hbar c}{Z\alpha\,mc^2}$

  Feinstrukturkonstante: $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$

  - Wasserstoff: $Z = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \frac{1}{137}$ nichtrelativist. Näherung ok
  - Urankern: $Z = 92 \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = 0,67$ " " fragwürdig

  - Quarks im Proton (Quarkmodell): $mc^2 \sim 300$ MeV, $r \sim 1$ fm $\rightarrow \frac{v}{c} \sim 0,67$

2.1 Motivation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gerade in der Welt des „ganz Kleinen”, für die eine qm. Beschreibung wichtig ist, werden aber auch die höchsten Geschwindigkeiten erreicht, z.B. kosmische Höhenstrahlung, Teilchen-Beschleuniger.

- Abschätzung: Bohr’sches Atommodell

  Elektronen bewegen sich auf Kreisbahnen mit $L = n\hbar$

  $$n = 1: \quad L = r\,p = rmv = \hbar \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{v}{c} = \frac{\hbar c}{r\,mc^2} = Z\alpha = \frac{Z}{137}$$

  Bohr’scher Radius (Kernladungszahl Z): $r = \frac{\hbar^2}{Z\,e^2\,m} = \frac{\hbar c}{Z\alpha\,mc^2}$

  Feinstrukturkonstante: $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$

  - Wasserstoff: $Z = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \frac{1}{137}$ nichtrelativist. Näherung ok
  - Urankern: $Z = 92 \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = 0,67$ ” ” fragwürdig

  - Quarks im Proton (QCD): $mc^2 \sim 5$ MeV, $r \sim 1$ fm $\longrightarrow$ $\frac{v}{c} \sim 40$ ↯

2.2 Lorentz-Transformationen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2.2 Lorentz-Transformationen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Grundaxiom der Speziellen Relativitätstheorie:

  Die physikalischen Gesetze und insbesondere die Lichtgeschwindigkeit sind in allen Inertialsystemen gleich.

2.2 Lorentz-Transformationen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Grundaxiom der Speziellen Relativitätstheorie:

  Die physikalischen Gesetze und insbesondere die Lichtgeschwindigkeit sind in allen Inertialsystemen gleich.

- Beispiel: reiner Lorentz-Boost
  - zwei Inertialsysteme: K: (t, x, y, z), K': (t', x', y', z')
  - Zur Zeit $t = 0$ gelte auch $t' = 0$, und beide Koordinatenursprünge stimmen überein: $(t, x, y, z) = (0, 0, 0, 0) \quad \hat{=} \quad (t', x', y', z') = (0, 0, 0, 0)$
  - K' bewegt sich gegenüber K mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$.

2.2 Lorentz-Transformationen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Grundaxiom der Speziellen Relativitätstheorie:

  Die physikalischen Gesetze und insbesondere die Lichtgeschwindigkeit sind in allen Inertialsystemen gleich.

- Beispiel: reiner Lorentz-Boost
  - zwei Inertialsysteme: K: (t, x, y, z), K': (t', x', y', z')
  - Zur Zeit $t = 0$ gelte auch $t' = 0$, und beide Koordinatenursprünge stimmen überein: $(t, x, y, z) = (0, 0, 0, 0) \quad \hat{=} \quad (t', x', y', z') = (0, 0, 0, 0)$
  - K' bewegt sich gegenüber K mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$.
  - Zur Zeit $t = t' = 0$ werde am Ursprung ein Lichtblitz erzeugt.

2.2 Lorentz-Transformationen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Grundaxiom der Speziellen Relativitätstheorie:

  Die physikalischen Gesetze und insbesondere die Lichtgeschwindigkeit sind in allen Inertialsystemen gleich.

- Beispiel: reiner Lorentz-Boost
  - zwei Inertialsysteme: K: (t, x, y, z), K': (t', x', y', z')
  - Zur Zeit $t = 0$ gelte auch $t' = 0$, und beide Koordinatenursprünge stimmen überein: $(t, x, y, z) = (0, 0, 0, 0) \;\hat{=}\; (t', x', y', z') = (0, 0, 0, 0)$
  - K' bewegt sich gegenüber K mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$.
  - Zur Zeit $t = t' = 0$ werde am Ursprung ein Lichtblitz erzeugt.
  - Dann gilt für die Wellenfront:

    K: $x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$ (c: Lichtgeschwindigkeit)

    K': $x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$

- Lorentz-Boost in x-Richtung:
  - K' bewege sich relativ zu K mit konstanter Geschwindigkeit v in x-Richtung.
  - Die Richtungen der Koordinatenachsen von K und K' stimmen überein.

- Lorentz-Boost in x-Richtung:
  - K' bewege sich relativ zu K mit konstanter Geschwindigkeit v in x-Richtung.
  - Die Richtungen der Koordinatenachsen von K und K' stimmen überein.

Dann ergibt sich:

$$ct' = \gamma\,(ct - \beta x)\,, \qquad \beta \equiv \tfrac{v}{c}, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x' = \gamma\,(x - \beta ct)\,,$$

$$y' = y\,,$$

$$z' = z$$

- Lorentz-Boost in x-Richtung:
  - K' bewege sich relativ zu K mit konstanter Geschwindigkeit v in x-Richtung.
  - Die Richtungen der Koordinatenachsen von K und K' stimmen überein.

Dann ergibt sich:

$$ct' = \gamma\,(ct - \beta x)\,, \qquad \beta \equiv \tfrac{v}{c}, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x' = \gamma\,(x - \beta ct)\,,$$

$$y' = y\,,$$

$$z' = z$$

$$\Rightarrow \quad (c\tau)^2 \equiv (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \text{invariant}$$

τ: „Eigenzeit"

- Rapidität: $\chi = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \cosh\chi, \quad \beta\gamma = \sinh\chi$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\chi & -\sinh\chi & 0 & 0 \\ -\sinh\chi & \cosh\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ formale Ähnlichkeit mit (imaginären) Drehungen

Minkowski-Raum

- kontravarianter Vierervektor: $\begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \equiv (x^\mu) \equiv x$

Minkowski-Raum

- kontravarianter Vierervektor: $$\begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \equiv (x^\mu) \equiv x$$

- kovarianter Vierervektor: $$(x_\mu) \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -\vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -\vec{x} \end{pmatrix}$$

Minkowski-Raum

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- kontravarianter Vierervektor: $\begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \equiv (x^\mu) \equiv x$

- kovarianter Vierervektor: $(x_\mu) \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -\vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -\vec{x} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x_\mu = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (ct)^2 - \vec{x}^{\,2} = (c\tau)^2$$

Minkowski-Raum

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- kontravarianter Vierervektor: $\begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \equiv (x^\mu) \equiv x$

- kovarianter Vierervektor: $(x_\mu) \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -\vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -\vec{x} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad x^2 \equiv x^\mu x_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x_\mu = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (ct)^2 - \vec{x}^{\,2} = (c\tau)^2$$

Minkowski-Raum

- kontravarianter Vierervektor: $\begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \equiv (x^\mu) \equiv x$

- kovarianter Vierervektor: $(x_\mu) \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -\vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -\vec{x} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad x^2 \equiv x^\mu x_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x_\mu = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (ct)^2 - \vec{x}^{\,2} = (c\tau)^2$$

- Einstein'sche Summenkonvention:
  - griechische Indizes: $a^\mu b_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} a^\mu b_\mu$
  - lateinische Indizes: $a^k b_k \equiv \sum_{k=1}^{3} a^k b_k$

Metrischer Tensor

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Zusammenhang zwischen ko- und kontravarianten Vierervektoren:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$$

Metrischer Tensor

- Zusammenhang zwischen ko- und kontravarianten Vierervektoren:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$$

$$(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(metrischer Tensor)

Metrischer Tensor

- Zusammenhang zwischen ko- und kontravarianten Vierervektoren:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$$

$$(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(metrischer Tensor)

- Metrischer Ternsor auf sich selbst angewandt:

$$g^\mu{}_\nu = g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu}, \quad g_\mu{}^\nu = g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu}$$

Metrischer Tensor

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Zusammenhang zwischen ko- und kontravarianten Vierervektoren:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \qquad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$$

$$(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(metrischer Tensor)

- Metrischer Ternsor auf sich selbst angewandt:

$$g^\mu{}_\nu = g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu}, \quad g_\mu{}^\nu = g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu} \quad \Rightarrow \quad (g^\mu{}_\nu) = (g_\mu{}^\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Metrischer Tensor

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Zusammenhang zwischen ko- und kontravarianten Vierervektoren:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$$

$$(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(metrischer Tensor)

- Metrischer Ternsor auf sich selbst angewandt:

$$g^\mu{}_\nu = g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu}, \quad g_\mu{}^\nu = g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu} \quad \Rightarrow \quad (g^\mu{}_\nu) = (g_\mu{}^\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad g^\mu{}_\nu = g_\mu{}^\nu \equiv \delta^\mu{}_\nu \equiv \delta_\mu{}^\nu \equiv \delta^\nu_\mu$$ (in Anlehung an das Kronecker-Symbol)

Lorentz-Transformationen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Physikalische Gesetze sind invariant unter Poincaré-Transformationen

  = inhomogene Lorentz-Transformationen: $\boxed{x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} + a^{\mu}}$

  = (homogene) Lorentz-Transformationen + räuml. und zeitl. Translationen

Lorentz-Transformationen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Physikalische Gesetze sind invariant unter Poincaré-Transformationen

  = inhomogene Lorentz-Transformationen: $\boxed{x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} + a^{\mu}}$

  = (homogene) Lorentz-Transformationen + räuml. und zeitl. Translationen

- Lorentz-Transformationen: $\boxed{x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}}$

  = $\underbrace{\text{Lorentz-Boosts + räuml. Drehungen}}_{\text{eigentlich orthochrone Lorentz-Transformationen}}$ + Raumspiegelg. + Zeitspiegelg.

Lorentz-Transformationen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Physikalische Gesetze sind invariant unter Poincaré-Transformationen

  = inhomogene Lorentz-Transformationen: $\boxed{x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} + a^{\mu}}$

  = (homogene) Lorentz-Transformationen + räuml. und zeitl. Translationen

- Lorentz-Transformationen: $\boxed{x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}}$

  = $\underbrace{\text{Lorentz-Boosts + räuml. Drehungen}}_{\text{eigentlich orthochrone Lorentz-Transformationen}}$ + Raumspiegelg. + Zeitspiegelg.

- Beispiel: Boost entlang der x-Achse

$$(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \cosh\chi & -\sinh\chi & 0 & 0 \\ -\sinh\chi & \cosh\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Lorentz-Transformation der kovarianten Komponenten:

$$\boxed{x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \, x_\nu} \qquad (= \text{Definition von } \Lambda_\mu{}^\nu)$$

- Lorentz-Transformation der kovarianten Komponenten:

$$\boxed{x'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\ \nu}\, x_{\nu}} \qquad (= \text{Definition von } \Lambda_{\mu}^{\ \nu})$$

$$= g_{\mu\alpha}\, x'^{\alpha}$$

▶ Lorentz-Transformation der kovarianten Komponenten:

$$\boxed{x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \, x_\nu} \qquad (= \text{Definition von } \Lambda_\mu{}^\nu)$$

$$= g_{\mu\alpha} \, x'^\alpha = g_{\mu\alpha} \, \Lambda^\alpha{}_\beta \, x^\beta$$

- Lorentz-Transformation der kovarianten Komponenten:

$$\boxed{x'_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu}\, x_{\nu}} \qquad \text{(= Definition von } \Lambda_{\mu}{}^{\nu}\text{)}$$

$$= g_{\mu\alpha}\, x'^{\alpha} = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\, x^{\beta} = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\, g^{\beta\nu}\, x_{\nu}$$

- Lorentz-Transformation der kovarianten Komponenten:

$$\boxed{x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu\, x_\nu} \qquad (= \text{Definition von } \Lambda_\mu{}^\nu)$$

$$= g_{\mu\alpha}\, x'^\alpha = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, x^\beta = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, g^{\beta\nu}\, x_\nu \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Lambda_\mu{}^\nu = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, g^{\beta\nu}}$$

- Lorentz-Transformation der kovarianten Komponenten:

$\boxed{x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu\, x_\nu}$ (= Definition von $\Lambda_\mu{}^\nu$)

$$= g_{\mu\alpha}\, x'^\alpha = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, x^\beta = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, g^{\beta\nu}\, x_\nu \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Lambda_\mu{}^\nu = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, g^{\beta\nu}}$$

d.h. man kann auch die Indizes von Λ mit Hilfe des metrischen Tensors verschieben.

- Lorentz-Transformation der kovarianten Komponenten:

$$\boxed{x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu\, x_\nu} \qquad (= \text{Definition von } \Lambda_\mu{}^\nu)$$

$$= g_{\mu\alpha}\, x'^\alpha = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, x^\beta = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, g^{\beta\nu}\, x_\nu \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Lambda_\mu{}^\nu = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, g^{\beta\nu}}$$

d.h. man kann auch die Indizes von Λ mit Hilfe des metrischen Tensors verschieben.

- Invarianz der Eigenzeit:

$$x'_\mu\, x'^\mu \stackrel{!}{=} x_\nu\, x^\nu$$

- Lorentz-Transformation der kovarianten Komponenten:

$$\boxed{x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \, x_\nu} \qquad (= \text{Definition von } \Lambda_\mu{}^\nu)$$

$$= g_{\mu\alpha} \, x'^\alpha = g_{\mu\alpha} \, \Lambda^\alpha{}_\beta \, x^\beta = g_{\mu\alpha} \, \Lambda^\alpha{}_\beta \, g^{\beta\nu} \, x_\nu \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Lambda_\mu{}^\nu = g_{\mu\alpha} \, \Lambda^\alpha{}_\beta \, g^{\beta\nu}}$$

d.h. man kann auch die Indizes von Λ mit Hilfe des metrischen Tensors verschieben.

- Invarianz der Eigenzeit:

$$\Lambda_\mu{}^\nu \, x_\nu \, \Lambda^\mu{}_\lambda \, x^\lambda = x'_\mu \, x'^\mu \stackrel{!}{=} x_\nu \, x^\nu$$

- Lorentz-Transformation der kovarianten Komponenten:

$$\boxed{x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu\, x_\nu} \qquad (= \text{Definition von } \Lambda_\mu{}^\nu)$$

$$= g_{\mu\alpha}\, x'^\alpha = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, x^\beta = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, g^{\beta\nu}\, x_\nu \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Lambda_\mu{}^\nu = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, g^{\beta\nu}}$$

d.h. man kann auch die Indizes von Λ mit Hilfe des metrischen Tensors verschieben.

- Invarianz der Eigenzeit:

$$\Lambda_\mu{}^\nu\, x_\nu\, \Lambda^\mu{}_\lambda\, x^\lambda = x'_\mu\, x'^\mu \stackrel{!}{=} x_\nu\, x^\nu = x_\nu\, g^\nu{}_\lambda\, x^\lambda$$

- Lorentz-Transformation der kovarianten Komponenten:

$$\boxed{x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu\, x_\nu} \qquad (= \text{Definition von } \Lambda_\mu{}^\nu)$$

$$= g_{\mu\alpha}\, x'^\alpha = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, x^\beta = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, g^{\beta\nu}\, x_\nu \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Lambda_\mu{}^\nu = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, g^{\beta\nu}}$$

d.h. man kann auch die Indizes von Λ mit Hilfe des metrischen Tensors verschieben.

- Invarianz der Eigenzeit:

$$\Lambda_\mu{}^\nu\, x_\nu\, \Lambda^\mu{}_\lambda\, x^\lambda = x'_\mu\, x'^\mu \stackrel{!}{=} x_\nu\, x^\nu = x_\nu\, g^\nu{}_\lambda\, x^\lambda \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Lambda_\mu{}^\nu\, \Lambda^\mu{}_\lambda = g^\nu{}_\lambda = \delta^\nu_\lambda}$$

- Lorentz-Transformation der kovarianten Komponenten:

$$\boxed{x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \, x_\nu} \qquad (= \text{Definition von } \Lambda_\mu{}^\nu)$$

$$= g_{\mu\alpha}\, x'^\alpha = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, x^\beta = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, g^{\beta\nu}\, x_\nu \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Lambda_\mu{}^\nu = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, g^{\beta\nu}}$$

d.h. man kann auch die Indizes von Λ mit Hilfe des metrischen Tensors verschieben.

- Invarianz der Eigenzeit:

$$\Lambda_\mu{}^\nu\, x_\nu\, \Lambda^\mu{}_\lambda\, x^\lambda = x'_\mu\, x'^\mu \stackrel{!}{=} x_\nu\, x^\nu = x_\nu\, g^\nu{}_\lambda\, x^\lambda \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Lambda_\mu{}^\nu\, \Lambda^\mu{}_\lambda = g^\nu{}_\lambda = \delta^\nu_\lambda}$$

kompakt: $\Lambda^T \Lambda = g$

- Lorentz-Transformation der kovarianten Komponenten:

$$\boxed{x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu\, x_\nu} \qquad (= \text{Definition von } \Lambda_\mu{}^\nu)$$

$$= g_{\mu\alpha}\, x'^\alpha = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, x^\beta = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, g^{\beta\nu}\, x_\nu \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Lambda_\mu{}^\nu = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, g^{\beta\nu}}$$

d.h. man kann auch die Indizes von Λ mit Hilfe des metrischen Tensors verschieben.

- Invarianz der Eigenzeit:

$$\Lambda_\mu{}^\nu\, x_\nu\, \Lambda^\mu{}_\lambda\, x^\lambda = x'_\mu\, x'^\mu \stackrel{!}{=} x_\nu\, x^\nu = x_\nu\, g^\nu{}_\lambda\, x^\lambda \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Lambda_\mu{}^\nu\, \Lambda^\mu{}_\lambda = g^\nu{}_\lambda = \delta^\nu_\lambda}$$

kompakt: $\Lambda^T \Lambda = g$

- Rücktransformation:

$$x^\nu = g^\nu{}_\lambda\, x^\lambda = \Lambda_\mu{}^\nu\, \Lambda^\mu{}_\lambda\, x^\lambda = \Lambda_\mu{}^\nu\, x'^\mu$$

- Lorentz-Transformation der kovarianten Komponenten:

$$\boxed{x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu} \qquad (= \text{Definition von } \Lambda_\mu{}^\nu)$$

$$= g_{\mu\alpha}\, x'^\alpha = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, x^\beta = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, g^{\beta\nu}\, x_\nu \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Lambda_\mu{}^\nu = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, g^{\beta\nu}}$$

d.h. man kann auch die Indizes von Λ mit Hilfe des metrischen Tensors verschieben.

- Invarianz der Eigenzeit:

$$\Lambda_\mu{}^\nu\, x_\nu\, \Lambda^\mu{}_\lambda\, x^\lambda = x'_\mu\, x'^\mu \stackrel{!}{=} x_\nu\, x^\nu = x_\nu\, g^\nu{}_\lambda\, x^\lambda \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Lambda_\mu{}^\nu\, \Lambda^\mu{}_\lambda = g^\nu{}_\lambda = \delta^\nu_\lambda}$$

kompakt: $\Lambda^T \Lambda = g$

- Rücktransformation:

$$x^\nu = g^\nu{}_\lambda\, x^\lambda = \Lambda_\mu{}^\nu\, \Lambda^\mu{}_\lambda\, x^\lambda = \Lambda_\mu{}^\nu\, x'^\mu \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^\nu = x'^\mu\, \Lambda_\mu{}^\nu}$$

- Lorentz-Transformation der kovarianten Komponenten:

$$\boxed{x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu\, x_\nu} \qquad (= \text{Definition von } \Lambda_\mu{}^\nu)$$

$$= g_{\mu\alpha}\, x'^\alpha = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, x^\beta = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, g^{\beta\nu}\, x_\nu \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Lambda_\mu{}^\nu = g_{\mu\alpha}\, \Lambda^\alpha{}_\beta\, g^{\beta\nu}}$$

d.h. man kann auch die Indizes von Λ mit Hilfe des metrischen Tensors verschieben.

- Invarianz der Eigenzeit:

$$\Lambda_\mu{}^\nu\, x_\nu\, \Lambda^\mu{}_\lambda\, x^\lambda = x'_\mu\, x'^\mu \stackrel{!}{=} x_\nu\, x^\nu = x_\nu\, g^\nu{}_\lambda\, x^\lambda \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Lambda_\mu{}^\nu\, \Lambda^\mu{}_\lambda = g^\nu{}_\lambda = \delta^\nu_\lambda}$$

kompakt: $\Lambda^T \Lambda = g$

- Rücktransformation:

$$x^\nu = g^\nu{}_\lambda\, x^\lambda = \Lambda_\mu{}^\nu\, \Lambda^\mu{}_\lambda\, x^\lambda = \Lambda_\mu{}^\nu\, x'^\mu \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^\nu = x'^\mu\, \Lambda_\mu{}^\nu}$$

analog: $\boxed{x_\nu = x'_\mu\, \Lambda^\mu{}_\nu}$

Vierervektoren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kontra- und kovariante Vierervektoren

  = vierkomponentige Objekte a, die sich unter Lorentz-Transformationen verhalten wie (x^μ) bzw. (x_μ):

$$\boxed{\begin{aligned} a'^{\mu} &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, a^{\nu}\,, \qquad & a^{\nu} &= a'^{\mu}\, \Lambda_{\mu}{}^{\nu}\,, \\ a'_{\mu} &= \Lambda_{\mu}{}^{\nu}\, a_{\nu}\,, \qquad & a_{\nu} &= a'_{\mu}\, \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,, \end{aligned}}$$

Vierervektoren

- Kontra- und kovariante Vierervektoren

  = vierkomponentige Objekte a, die sich unter Lorentz-Transformationen verhalten wie (x^μ) bzw. (x_μ):

$$\boxed{\begin{array}{ll} a'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, a^{\nu}\,, & a^{\nu} = a'^{\mu}\, \Lambda_{\mu}{}^{\nu}\,, \\ a'_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu}\, a_{\nu}\,, & a_{\nu} = a'_{\mu}\, \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,, \end{array}}$$

- Skalarprodukt: $a \cdot b \equiv a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu$

Vierervektoren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kontra- und kovariante Vierervektoren

  = vierkomponentige Objekte a, die sich unter Lorentz-Transformationen verhalten wie (x^μ) bzw. (x_μ):

$$\boxed{\begin{aligned} a'^{\mu} &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, a^{\nu}\,, \qquad & a^{\nu} &= a'^{\mu}\, \Lambda_{\mu}{}^{\nu}\,, \\ a'_{\mu} &= \Lambda_{\mu}{}^{\nu}\, a_{\nu}\,, \qquad & a_{\nu} &= a'_{\mu}\, \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,, \end{aligned}}$$

- Skalarprodukt: $a \cdot b \equiv a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu$

  $\Rightarrow \quad a' \cdot b' = a \cdot b \qquad$ (analog zu $x'^{\mu} x'_\mu = x^\mu x_\mu$)

Vierervektoren

- Kontra- und kovariante Vierervektoren

  = vierkomponentige Objekte a, die sich unter Lorentz-Transformationen verhalten wie (x^μ) bzw. (x_μ):

$$\boxed{\begin{aligned} a'^{\mu} &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, a^{\nu}\,, & a^{\nu} &= a'^{\mu}\, \Lambda_{\mu}{}^{\nu}\,, \\ a'_{\mu} &= \Lambda_{\mu}{}^{\nu}\, a_{\nu}\,, & a_{\nu} &= a'_{\mu}\, \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,, \end{aligned}}$$

- Skalarprodukt: $a \cdot b \equiv a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu$

  $\Rightarrow \quad a' \cdot b' = a \cdot b$ (analog zu $x'^{\,\mu} x'_\mu = x^\mu x_\mu$)

- Beispiel: Viererimpuls $p = (p^\mu) = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}$

  mit der relativistischen Energie $E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^{\,2} c^2}$

Vierervektoren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kontra- und kovariante Vierervektoren

  = vierkomponentige Objekte a, die sich unter Lorentz-Transformationen verhalten wie (x^μ) bzw. (x_μ):

$$\boxed{\begin{aligned} a'^{\mu} &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, a^{\nu}\,, & a^{\nu} &= a'^{\mu}\, \Lambda_{\mu}{}^{\nu}\,, \\ a'_{\mu} &= \Lambda_{\mu}{}^{\nu}\, a_{\nu}\,, & a_{\nu} &= a'_{\mu}\, \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,, \end{aligned}}$$

- Skalarprodukt: $a \cdot b \equiv a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu$

  $\Rightarrow \quad a' \cdot b' = a \cdot b \qquad$ (analog zu $x'^{\,\mu} x'_\mu = x^\mu x_\mu$)

- Beispiel: Viererimpuls $p = (p^\mu) = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}$

  mit der relativistischen Energie $\quad E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^{\,2} c^2}$

  $\Rightarrow \quad p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = m^2 c^2 \quad \checkmark$

- Vierergradienten:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$$

- Vierergradienten:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \quad \text{wie } x_{\mu} \quad \longrightarrow \quad \text{kovariant}$$

- Vierergradienten:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \qquad \text{wie } x_{\mu} \quad \longrightarrow \quad \text{kovariant}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} = \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\mu}} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \qquad \text{wie } x^{\mu} \quad \longrightarrow \quad \text{kontravariant}$$

- Vierergradienten:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \quad \text{wie } x_{\mu} \quad \rightarrow \quad \text{kovariant} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \equiv \partial_{\mu}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} = \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\mu}}\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \quad \text{wie } x^{\mu} \quad \rightarrow \quad \text{kontravariant} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \equiv \partial^{\mu}$$

- Vierergradienten:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \quad \text{wie } x_{\mu} \quad \to \quad \text{kovariant} \quad \to \quad \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \equiv \partial_{\mu}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} = \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\mu}} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \quad \text{wie } x^{\mu} \quad \to \quad \text{kontravariant} \quad \to \quad \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \equiv \partial^{\mu}$$

- Zusammenhang mit dem gewöhnlichen Dreiergradienten:

$$\nabla^{k} = \frac{\partial}{\partial x^{k}} = -\frac{\partial}{\partial x_{k}}$$

- Vierergradienten:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \quad \text{wie } x_\mu \quad \rightarrow \quad \text{kovariant} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \equiv \partial_\mu$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} = \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\mu}} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \quad \text{wie } x^\mu \quad \rightarrow \quad \text{kontravariant} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \equiv \partial^\mu$$

- Zusammenhang mit dem gewöhnlichen Dreiergradienten:

$$\nabla^k = \frac{\partial}{\partial x^k} = -\frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$\Rightarrow \quad (\partial_\mu) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} \\ (\frac{\partial}{\partial x^k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix}, \quad (\partial^\mu) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0} \\ (\frac{\partial}{\partial x_k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix}$$

- Vierergradienten:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \quad \text{wie } x_\mu \quad \rightarrow \quad \text{kovariant} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \equiv \partial_\mu$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} = \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\mu}} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \quad \text{wie } x^\mu \quad \rightarrow \quad \text{kontravariant} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \equiv \partial^\mu$$

- Zusammenhang mit dem gewöhnlichen Dreiergradienten:

$$\nabla^k = \frac{\partial}{\partial x^k} = -\frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$\Rightarrow \quad (\partial_\mu) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} \\ (\frac{\partial}{\partial x^k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix}, \quad (\partial^\mu) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0} \\ (\frac{\partial}{\partial x_k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix}$$

- d'Alambert-Operator: $\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$

- Vierergradienten:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \quad \text{wie } x_{\mu} \quad \rightarrow \quad \text{kovariant} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \equiv \partial_{\mu}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} = \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\mu}}\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \quad \text{wie } x^{\mu} \quad \rightarrow \quad \text{kontravariant} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \equiv \partial^{\mu}$$

- Zusammenhang mit dem gewöhnlichen Dreiergradienten:

$$\nabla^{k} = \frac{\partial}{\partial x^{k}} = -\frac{\partial}{\partial x_{k}}$$

$$\Rightarrow \quad (\partial_{\mu}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{0}} \\ (\frac{\partial}{\partial x^{k}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix}, \quad (\partial^{\mu}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{0}} \\ (\frac{\partial}{\partial x_{k}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix}$$

- d'Alambert-Operator: $\Box \equiv \partial_{\mu}\partial^{\mu} = \frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} - \vec{\nabla}^{2}$

- Tensoren zweiter Stufe: $A'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}A^{\alpha\beta}$ (wie $x^{\mu}x^{\nu}$)

- Vierergradienten:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \quad \text{wie } x_\mu \quad \longrightarrow \quad \text{kovariant} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \equiv \partial_\mu$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} = \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\mu}}\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \quad \text{wie } x^\mu \quad \longrightarrow \quad \text{kontravariant} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \equiv \partial^\mu$$

- Zusammenhang mit dem gewöhnlichen Dreiergradienten:

$$\nabla^k = \frac{\partial}{\partial x^k} = -\frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$\Rightarrow \quad (\partial_\mu) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} \\ (\frac{\partial}{\partial x^k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix}, \quad (\partial^\mu) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0} \\ (\frac{\partial}{\partial x_k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix}$$

- d'Alambert-Operator: $\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$

- Tensoren zweiter Stufe: $A'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} A^{\alpha\beta}$ (wie $x^\mu x^\nu$)

  Beispiele: Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$, $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$

- Vierergradienten:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \quad \text{wie } x_{\mu} \quad \rightarrow \quad \text{kovariant} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \equiv \partial_{\mu}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} = \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\mu}} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \quad \text{wie } x^{\mu} \quad \rightarrow \quad \text{kontravariant} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \equiv \partial^{\mu}$$

- Zusammenhang mit dem gewöhnlichen Dreiergradienten:

$$\nabla^k = \frac{\partial}{\partial x^k} = -\frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$\Rightarrow \quad (\partial_{\mu}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} \\ (\frac{\partial}{\partial x^k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix}, \quad (\partial^{\mu}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0} \\ (\frac{\partial}{\partial x_k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix}$$

- d'Alambert-Operator: $\Box \equiv \partial_{\mu}\partial^{\mu} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$

- Tensoren zweiter Stufe: $A'^{\,\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\, A^{\alpha\beta}$ (wie $x^{\mu}x^{\nu}$)

  Beispiele: Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$, $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$

- Tensoren *n*-ter Stufe. $A'^{\,\mu_1\ldots\mu_n} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\nu_1} \ldots \Lambda^{\mu_n}{}_{\nu_n} A^{\nu_1\ldots\nu_n}$

Lorentz-Transformationen: weitere Eigenschaften

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Aus $\Lambda_\mu{}^\nu \, \Lambda^\mu{}_\lambda = \delta^\nu_\lambda$ (s.o.) kann man herleiten:
  - $\det(\Lambda_\mu{}^\nu) = \pm 1$
  - $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ oder $\Lambda^0{}_0 \leq -1$

→ Klassifizierung von Lorentz-Transf. durch die Vorzeichen von $\det(\Lambda_\mu{}^\nu)$ und $\Lambda^0{}_0$

Lorentz-Transformationen: weitere Eigenschaften

- Aus $\Lambda_\mu{}^\nu \, \Lambda^\mu{}_\lambda = \delta^\nu_\lambda$ (s.o.) kann man herleiten:
  - $\det(\Lambda_\mu{}^\nu) = \pm 1$
  - $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ oder $\Lambda^0{}_0 \leq -1$

→ Klassifizierung von Lorentz-Transf. durch die Vorzeichen von $\det(\Lambda_\mu{}^\nu)$ und $\Lambda^0{}_0$

- Boosts und Drehungen: $\det(\Lambda_\mu{}^\nu) = +1, \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1$

  (können kontinuierlich aus der Identität erzeugt werden)

Lorentz-Transformationen: weitere Eigenschaften

- Aus $\Lambda_\mu{}^\nu \, \Lambda^\mu{}_\lambda = \delta^\nu_\lambda$ (s.o.) kann man herleiten:
  - $\det(\Lambda_\mu{}^\nu) = \pm 1$
  - $\Lambda^0{}_0 \geq 1 \quad \text{oder} \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1$

→ Klassifizierung von Lorentz-Transf. durch die Vorzeichen von $\det(\Lambda_\mu{}^\nu)$ und $\Lambda^0{}_0$

- Boosts und Drehungen: $\det(\Lambda_\mu{}^\nu) = +1, \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1$

  (können kontinuierlich aus der Identität erzeugt werden)

- Raumspiegelg.: $x' = \begin{pmatrix} ct' \\ \vec{x}\,' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -\vec{x}\,' \end{pmatrix} \Rightarrow (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow \quad \det(\Lambda_\mu{}^\nu) = -1, \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1$

Lorentz-Transformationen: weitere Eigenschaften

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Aus $\Lambda_\mu{}^\nu \, \Lambda^\mu{}_\lambda = \delta^\nu_\lambda$ (s.o.) kann man herleiten:
  - $\det(\Lambda_\mu{}^\nu) = \pm 1$
  - $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ oder $\Lambda^0{}_0 \leq -1$

$\rightarrow$ Klassifizierung von Lorentz-Transf. durch die Vorzeichen von $\det(\Lambda_\mu{}^\nu)$ und $\Lambda^0{}_0$

- Boosts und Drehungen: $\det(\Lambda_\mu{}^\nu) = +1, \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1$

  (können kontinuierlich aus der Identität erzeugt werden)

- Raumspiegelg.: $x' = \begin{pmatrix} ct' \\ \vec{x}\,' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -\vec{x}\,' \end{pmatrix} \Rightarrow (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow \quad \det(\Lambda_\mu{}^\nu) = -1, \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1$

- Zeitspiegelg.: $x' = \begin{pmatrix} ct' \\ \vec{x}\,' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ct \\ \vec{x}\,' \end{pmatrix} \Rightarrow (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow \quad \det(\Lambda_\mu{}^\nu) = -1, \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1$