Elementarteilchenphysik

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. Schramm

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2015/16
2. Übungsblatt 13.11.2015

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass der unitäre Operator, der die Transformation der Wellenfunktion eines quantenmechanischen Systems ohne Spin unter einer beliebigen Drehung beschreibt, $\psi'(\vec{r}) = U\psi(\vec{r})$, durch

$$U(\vec{\theta}) = e^{-i\vec{\theta}\vec{J}}$$

gegeben ist. Hierbei sei $\vec{\theta} = \theta\hat{\omega}$, mit dem Drehwinkel θ und dem Einheitsvektor $\hat{\omega}$, der in Richtung der Drehachse zeigt. $\vec{J} = \vec{L}$ ist der Bahndrehimpulsoperator.

Aufgabe 5:

Zeigen Sie die in der Vorlesung angegebene Relation

$$e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}} e^{i\vec{\beta}\cdot\vec{T}} = e^{i(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot\vec{T} - \frac{1}{2}\alpha_a\beta_b[T_a,T_b] + \text{höhere Ordnungen}},$$

indem Sie beide Seiten der Gleichung bis zur zweiten Ordnung in den als klein angenommenen Parametern α_i und β_j entwickeln.

Aufgabe 6:

a) Seien A, B und C drei beliebige Operatoren. Zeigen Sie die Jacobi-Identität

$$[A,[B,C]] + [C,[A,B]] + [B,[C,A]] = 0.$$

b) Für eine Lie-Algebra gilt $[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c$. Zeigen Sie, dass diese Relation von den Generatoren der adjungierten Darstellung, $(\mathscr{T}_a)_{bc} = -i f_{abc}$, erfüllt wird.

Aufgabe 7:

Die Fundamentaldarstellung der $SU(2)$ kann mit Hilfe der Pauli-Matrizen in der Form $U(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}/2}$ geschrieben werden. Zeigen Sie, dass dies der Matrix

$$U(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} + i\hat{\theta}_3 \sin\frac{\theta}{2} & i(\hat{\theta}_1 - i\hat{\theta}_2)\sin\frac{\theta}{2} \\ i(\hat{\theta}_1 + i\hat{\theta}_2)\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} - i\hat{\theta}_3 \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

entspricht. Dabei sind $\theta = |\vec{\theta}|$ und $\hat{\theta}_i = \theta_i/\theta$.
Anleitung: Schreiben Sie die e-Funktion als Potenzreihe und untersuchen Sie zunächst die ersten beide Potenzen von $\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}$. Aus dem Ergebnis lassen sich dann alle höheren Potenzen ablesen.

Aufgabe 8:

Konstruieren Sie mittels der in der Vorlesung vorgeführten Methode eine dreidimensionale Darstellung der $SU(2)$-Generatoren J_1, J_2 und J_3.